Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

Prof. A. Mirlin
Dr. P. Schmitteckert, M. Schütt

Blatt 12
Abgabe 08.07.11, 14:00

---

1. "Zero-bias anomaly" in der Luttinger-Flüssigkeit (30 Punkte)

Wir betrachten die Luttinger-Flüssigkeit mit dem Hamilton-Operator H, dessen Ursprung in der Vorlesung geklärt wird.

$$H = \pi v_F \int dx \left(\hat{\rho}_+^2(x) + \hat{\rho}_-^2(x)\right) + \frac{g}{2} \int dx \left(\hat{\rho}_+(x) + \hat{\rho}_-(x)\right)^2, \tag{1}$$

Hierbei sind $\hat{\rho}_{+,-}(x)$ die "rechts-/linkslaufenden" Dichteoperatoren,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_+(x) &= \sum_{q>0} \left(\frac{q}{2\pi L}\right)^{1/2} \left(b_q e^{iqx} + b_q^\dagger e^{-iqx}\right) e^{-\frac{a}{2}|q|}, \\ \hat{\rho}_-(x) &= \sum_{q<0} \left(\frac{|q|}{2\pi L}\right)^{1/2} \left(b_q e^{iqx} + b_q^\dagger e^{-iqx}\right) e^{-\frac{a}{2}|q|}, \end{aligned} \tag{2}$$

und die bosonischen Operatoren b_q, $b_q^\dagger$ genügen der Vertauschungsrelation $[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$. Der Faktor $e^{-\frac{a}{2}|q|}$ in den beiden Ausdrücken generiert einen effektiven UV-"Cut-Off" bei $q \sim a^{-1} \sim k_F$, da Gleichung (1) ein effektiver niedrig-Energie-Hamilton-Operator ist (siehe Vorlesung).

Ziel dieser Aufgabe ist, es Sie mit der Methode der Bosonisierung vertraut zu machen und die sogenannte "Zero-bias anomaly" analytisch zu beschreiben.

Wir beginnen mit der Berechnung der Gleichgewichts-Greenschen Funktionen (ohne Zeitordnung T!)

$$iG_\pm^>(x,t) = \langle \psi_\pm(x,t)\psi_\pm^\dagger(0,0)\rangle \tag{3}$$

unter Verwendung der bosonischen Darstellung der fermionischen Feldoperatoren $\psi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\{i\hat{\phi}_\pm(x)\}$. Darin ist und

$$\hat{\phi}_\pm(x) = \pm 2\pi \int_{-\infty}^{x} \hat{\rho}_\pm(x')dx'. \tag{4}$$

(a) Begründen Sie unter Verweis auf die Jordan-Wigner-Transformation (Blatt 4 Aufgabe 2a) wieso $\psi_\pm(x)$ ein fermionischer Operator ist.

(b) Betrachten Sie zunächst das nichtwechselwirkende System ($g = 0$). Benutzen Sie

  (i) die Baker-Hausdorff-Formel $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ (falls $[A,[A,B]] = 0 = [B,[A,B]]$)

  (ii) die Beziehung $\langle e^{i[A-\langle A\rangle]}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left[\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\right]}$ für Mittelwerte bezüglich eines *Gleichgewichts*dichteoperators mit *quadratischem Hamilton-Operator* und zeigen Sie

$$\begin{aligned} iG^{>}_{\pm}(x,t) &= \frac{1}{2\pi a} e^{J_\pm(x,t)}, \\ J_\pm(x,t) &= \frac{2\pi}{L}\sum_{q>0}\frac{e^{-qa}}{q}\left\{(n_q+1)(e^{iq(\pm x - v_F t)}-1)+n_q(e^{-iq(\pm x - v_F t)}-1)\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

worin $n_q = \left[e^{\beta v_F q}-1\right]^{-1}$ die bosonischen Besetzungszahlen sind.
Hinweis: Bestimmen Sie die Zeitentwicklung von $\hat\rho_\pm(x)$, bestimmen Sie $\hat\phi(x,t)$ und überlegen Sie sich dann, wie Sie die Beziehungen (i) und (ii) verwenden können.

(c) Wandeln Sie die q-Summe in ein Integral um und zeigen Sie ($\tilde a = a/v_F$)

$$J_\pm(x,t) = \ln\left[\frac{i\pi\tilde a T}{\sinh \pi T(\pm x/v_F - t + i\tilde a)}\right]. \tag{6}$$

Hinweis: Führen Sie die q-Integration zunächst für die Ableitungen $\partial_{z_\pm} J_\pm$ durch, worin $z_\pm = \pm x - v_F t$ ist.

(d) Betrachten Sie nun das wechselwirkende System ($g \neq 0$). Benutzen Sie die Bogoliubov-Transformation

$$\begin{pmatrix} \tilde b_q \\ \tilde b^\dagger_{-q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_q \\ b^\dagger_{-q}\end{pmatrix} \tag{7}$$

mit $\tanh 2\theta = g/(2\pi v_F + g)$, welche den vollen Hamilton-Operator diagonalisiert, um

$$iG^{>}_{\pm}(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{i\pi\tilde a T}{\sinh \pi T(\pm x/u - t + i\tilde a)}\right)^{\cosh^2\theta}\left(\frac{i\pi\tilde a T}{\sinh \pi T(\mp x/u - t + i\tilde a)}\right)^{\sinh^2\theta}. \tag{8}$$

zu zeigen. Hierin ist nun $\tilde a = a/u$ und $u = \sqrt{(v_F + g/2\pi)^2 - (g/2\pi)^2}$ die Plasmon-Geschwindigkeit.

(e) Zu guter Letzt bestimmen wir die (Tunnel-)Zustandsdichte für das wechselwirkende System. Berechnen Sie hierzu

$$\nu(\epsilon) = -\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}t\, e^{i\epsilon t}\mathrm{Im}\, G^R(0,t) = \frac{i}{2\pi}\int \mathrm{d}t\, e^{i\epsilon t}(G^{>}_{\pm}(x=0,t) - G^{<}_{\pm}(x=0,t)) \tag{9}$$

im Grenzfall $T \to 0$. Für dieses Modell gilt $G^{<}_{\pm}(x=0,t) = [G^{>}_{\pm}(x=0,t)]^*$. Skizzieren Sie ihr Ergebnis und vergleichen Sie es mit der Zustandsdichte einer Fermiflüssigkeit, beachten Sie hierbei die Energieskalen.
Hinweis: Verwenden Sie, dass Sie $0 < \alpha < 1$ annehmen können, da ν als Funktion von α im Bereich $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ analytisch ist ($\alpha = 2\cosh^2\theta - 1$). Führen Sie das "branch-cut" Integral aus und verwenden Sie $\sin(\pi\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi$. Das Ergebnis ist: $\nu(\epsilon) = \frac{|\tilde a\epsilon|^{\alpha-1}}{2\pi u \Gamma(\alpha)}$