

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

PROF. A. MIRLIN

Blatt 2

DR. P. SCHMITTECKERT, M. SCHÜTT

Abgabe 28.04.11, 14:00

1. Gebundene Zustände im flachen Potentialtopf (12 Punkte)

Ein Potentialtopf mit linearer Dimension (Durchmesser) a gilt als “flach”, wenn die Tiefe U_0 wesentlich kleiner ist als die kinetische Energie eines im Topf lokalisierten Elektrons:

$$U_0 \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (1)$$

Gebundene Zustände sind deshalb räumlich wesentlich weiter ausgedehnt als der Topf, während die Bindungsenergie wesentlich geringer ist als U_0 . Es gilt, die Existenz gebundener Zustände in $d = 1, 2, 3$ mit Hilfe der Streuamplitude zu untersuchen.

Die Green'sche Funktion eines Elektrons in einem äußeren Potential $V(\mathbf{r})$ genügt der Dyson Gleichung

$$G(\epsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\epsilon, \mathbf{p})(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \int \frac{d^d p''}{(2\pi)^d} G_0(\epsilon, \mathbf{p}) V(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') G(\epsilon, \mathbf{p}'', \mathbf{p}'), \quad (2)$$

wobei

$$G_0(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\epsilon - \frac{p^2}{2m} + i0} \quad (3)$$

die (retardierte) Green'sche Funktion des freien Elektrons und

$$V(\mathbf{p}) = \int d^d r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \quad (4)$$

die Fouriertransformierte des Potentials ist. Die Green'sche Funktion lässt sich auch mit Hilfe der Streuamplitude (oder auch “amputierte Green'sche Funktion”) $F(\epsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ darstellen:

$$G(\epsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = G_0(\epsilon, \mathbf{p})(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + G_0(\epsilon, \mathbf{p}) F(\epsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}') G_0(\epsilon, \mathbf{p}'). \quad (5)$$

- (a) Welcher Summe von Feynman Diagrammen entspricht F ? Stellen Sie in Analogie zur Dyson Gleichung für G eine Integralgleichung für F auf, die außer F nur V und G_0 enthält.
- (b) Begründen Sie, warum gebundenen Zustände des Potentialtopfes $V(\mathbf{r})$ Polen von $F(\epsilon, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ bei negativen Energien ϵ entsprechen.

Es gilt nun, die gebundenen Zustände des flachen Potentialtopfes zu bestimmen. Nähern Sie hierzu den Potentialtopf durch eine δ -Distribution:

$$V(\mathbf{r}) = -U_0 a^d \delta^d(\mathbf{r}). \quad (6)$$

- (c) Ist diese Näherung nur für Töpfe mit kleinem Durchmesser a oder für flache Töpfe ganz allgemein sinnvoll?
- (d) Berechnen Sie $V(\mathbf{p})$. Zeigen Sie anhand der Integralgleichung aus Teil a), dass F nun nur noch von ϵ abhängt.
- (e) Zeigen Sie, dass in $d = 1$ ein gebundener Zustand existiert und berechnen Sie die Energie. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit *Landau und Lifshitz, Bd. III, Quantenmechanik*, §45, Aufgabe 1.
- (f) Untersuchen Sie, ob auch in $d = 2$ ein gebundener Zustand existiert und vergleichen Sie das Ergebnis mit *Landau und Lifshitz, Bd. III, Quantenmechanik*, §45, Aufgabe 2.
- Hinweis: Überlegen Sie sich, ob es physikalisch sinnvoll ist, die Impulsintegration von $|\mathbf{p}| = p = 0$ bis $p = \infty$ auszuführen? Warum ist es notwendig, einen so genannten *cutoff* einzuführen und durch welche Größe wird er bestimmt? Es ist hierbei vielleicht hilfreich, wenn Sie sich überlegen, welche Näherungen in der bisherigen Rechnung gemacht wurden.
- (g) Zeigen Sie schließlich, dass in $d \geq 3$ keine gebundenen Zustände existieren.

2. Die Holstein–Primakoff Darstellung

(6 Punkte)

Die Holstein–Primakoff Darstellung ist definiert durch

$$\hat{S}^+ = \hbar\sqrt{2S}\hat{a}^\dagger\sqrt{1 - \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a}}{2S}} \quad (7)$$

$$\hat{S}^- = \hbar\sqrt{2S}\sqrt{1 - \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a}}{2S}}\hat{a} \quad (8)$$

$$\hat{S}^z = \hbar(\hat{a}^\dagger\hat{a} - S) \quad (9)$$

wobei \hat{a}, \hat{a}^\dagger bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Zeigen Sie, dass die in (7),(8) und (9) definierten \hat{S} Operatoren die SU(2)-Vertauschungsrelation

$$[\hat{S}^a, \hat{S}^b] = i\hbar\epsilon^{abc}\hat{S}^c$$

eines Spin- S Systems erfüllen

3. Die Einteilchen Green'sche Funktion als Pfadintegral (12 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine alternative Darstellung der Einteilchen Green'sche Funktion (im weiteren auch Propagator) mit Hilfe des Pfadintegrals erarbeitet werden und mit Hilfe dieser Darstellung eine konkrete Green'sche Funktion bestimmt werden. Zur Vereinfachung gilt in der kompletten Aufgabe $\hbar = 1$. (Sie finden Details zu diesem Formalismus in jedem modernen Buch zum Thema Quantenfeldtheorie.)

(a) Konstruktion des Pfadintegrals.

Beginnen Sie mit folgender Darstellung eines Einteilchen Propagators (T ist der Zeitordnungsoperator):

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle = \theta(t_f - t_i) \langle x_f | T e^{-i \int_{t_i}^{t_f} dt' \hat{H}(t')} | x_i \rangle. \quad (10)$$

Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen von Gleichung (11), dass Gleichung (10) eine mögliche Darstellung der retardierten Einteilchen Green'schen Funktion ist.

$$(i\partial_{t_f} - H_{x(t_f), t_f})G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \delta(t_f - t_i) \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle = \delta(t_f - t_i) \delta(x_i - x_f). \quad (11)$$

Zerlegen Sie in Gleichung (10) die Zeitspanne t_i bis t_f in geeignet kleine Elemente $[t_{n-1}, t_n]$ und entwickeln Sie $\hat{U}(t_n, t_{n-1})$. Vereinfachen Sie auch den Propagator mit Hilfe folgender Identität:

$$\mathbb{1} = \int d^d x_n \int \frac{d^d p_n}{(2\pi)^d} |\vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_n | \vec{p}_n\rangle \langle \vec{p}_n | \quad \forall n. \quad (12)$$

Zeigen Sie dann, dass der Propagator in Form von

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \prod_{n=1}^N \left[\int d^d x_n \int \frac{d^d p_n}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{p}_n(\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1})}}{(2\pi)^d} e^{-i\Delta t \mathcal{H}(t_n, \vec{p}_n, \vec{x}_{n-1})} \right] \quad (13)$$

geschrieben werden kann, wobei \mathcal{H} die zum Hamilton Operator gehörende Hamilton Funktion ist. Überlegen Sie sich, warum Sie folgende Voraussetzung an \hat{H} stellen können und wann diese nicht gilt

$$\langle \vec{p}_n | \hat{H}(t_n) | \vec{x}_{n-1} \rangle = \mathcal{H}(t_n, \vec{p}_n, \vec{x}_{n-1}) \frac{e^{-i\vec{x}_{n-1}\vec{p}_n}}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (14)$$

Zeigen Sie schließlich durch das Vollziehen des Kontinuumslimites, dass die Green'sche Funktion wie folgt geschrieben werden kann.

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}\vec{x}(t) \int \mathcal{D}\vec{p}(t) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \vec{p}(t) \dot{\vec{x}}(t) - \mathcal{H}(t, \vec{p}(t), \vec{x}(t))} \quad (15)$$

Zeigen Sie weiter, dass durch Zerlegen des Impulses in $\vec{p}(t) = \vec{p}_{cl}(t) + \vec{r}_p(t)$ (mit dem klassischen Impuls $\vec{p}_{cl}(t)$), entwickeln der Hamilton-Funktion bis einschließlich erster Ordnung in $\vec{r}_p(t)$ und anschließendem Ausintegrieren des Impulsfreiheitsgrades $\vec{r}_p(t)$, sich die Green'sche Funktion auf folgende Form bringen lässt.

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}\vec{x}(t) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)} \quad (16)$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an folgende Identität: $\int d^d a e^{i\vec{a}\vec{x}} = (2\pi)^d \delta(\vec{x})$

- (b) Die Approximation der stationären Phase.

Nehmen Sie an, dass $S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ eine stationäre Bahn $\vec{q}(t)$ hat. Entwickeln Sie um diese explizit ($\vec{x} = \vec{q} + \Delta\vec{x}$):

$$S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] \approx S[\vec{q}, \dot{\vec{q}}] + \int dt_1 \frac{\delta S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]}{\delta \vec{x}(t_1)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}} \Delta\vec{x}(t_1) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \Delta\vec{x}(t_1) \frac{\delta^2 S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]}{\delta \vec{x}(t_1) \delta \vec{x}(t_2)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}} \Delta\vec{x}(t_2) \quad (17)$$

Aufgrund der stationären Bedingung gilt dann:

$$\frac{\delta S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]}{\delta \vec{x}(t_1)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{\vec{x}}} \frac{\delta \dot{\vec{x}}(t)}{\delta \vec{x}(t_1)} + \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \vec{x}} \frac{\delta \vec{x}(t)}{\delta \vec{x}(t_1)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}} = 0 \quad (18)$$

wobei $\frac{\delta \vec{x}(t)}{\delta \vec{x}(t_1)} = \delta(t - t_1)$ als Kronecker Symbol für kontinuierliche Systeme fungiert. Erklären Sie die physikalische Bedeutung der stationären Bahn. Begründen Sie folgende genäherte Darstellung der Greenschen Funktion.

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) \approx \theta(t_f - t_i) e^{iS[\vec{q}, \dot{\vec{q}}]} (2\pi)^{\frac{d}{2}} \det \left(\frac{1}{i} \frac{\delta^2 S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]}{\delta \vec{x}(t_1) \delta \vec{x}(t_2)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}} \right)^{-1/2} \quad (19)$$

- (c) Berechnen Sie die Green'sche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators ($\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$, $x(0) = x_i$ und $x(t) = x_f$) mit Hilfe von Gleichung (19).

Zeigen Sie hierfür zuerst, dass im Falle des harmonischen Oszillators Gleichung (17) eine exakte Darstellung ist.

Lösen Sie dann die klassischen Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die klassische Wirkung.

Um die Determinante zu bestimmen, gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Bestimmen Sie den Operator $\hat{O} = \frac{\delta^2 S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]}{\delta \vec{x}(t_1) \delta \vec{x}(t_2)} \Big|_{\vec{x}=\vec{q}}$ für den harmonischen Oszillator.
- (ii) Berechnen Sie die Eigenwerte des Operators durch explizites Lösen der Differentialgleichung $\hat{O}r_n = e_n r_n$ unter Berücksichtigung der Randbedingung.
Hinweis: Der Operator wirkt auf die Fluktuationen um die klassische Trajektorie, welche Bedingung müssen die Fluktuationen bei x_i und x_f erfüllen?
- (iii) Bestimmen Sie die Determinante in der Eigenbasis.
Hinweis: Verwenden Sie $\frac{z}{\sin z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n\pi^2})^{-1}$

Zeigen Sie, dass der Propagator geschrieben werden kann als:

$$iG(x_f, t; x_i, 0) = \theta(t_f - t_i) \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega t)} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{2} m\omega \left([x_i^2 + x_f^2] \cot(\omega t) - \frac{2x_i x_f}{\sin(\omega t)} \right)} \quad (20)$$

Betrachten Sie den Grenzfall eines freien Teilchens, vergleichen Sie dieses Ergebnis dann mit der Green'schen Funktion von Blatt 1 Aufgabe 1 und erklären Sie den Unterschied.