

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 11

PROF. A. MIRLIN

Blatt 5

DR. P. SCHMITTECKERT, M. SCHÜTT

Abgabe 19.05.11, 14:00

1. Hartree–Fock-Näherung

(8 Punkte)

Gegeben sei ein ideales Fermi-Gas bei Temperatur $T = 0$. Es soll nun die Wechselwirkung

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}\sigma\sigma'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\sigma'}^\dagger V_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{k}\sigma}$$

eingeschaltet und als kleine Störung betrachtet werden.

- Verwenden Sie das Wick'sche Theorem, um einen Ausdruck für den Erwartungswert von \hat{V} im nichtwechselwirkenden Grundzustand herzuleiten.
- Zeichnen Sie die den beiden Termen aus Teil (a) entsprechenden Diagramme und erläutern Sie deren physikalische Bedeutung.
- Entspricht dieser Ausdruck der Änderung der Grundzustandsenergie, die durch das Einschalten der Wechselwirkung entstanden ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Feynman-Regeln für eine Dreiteilchenwechselwirkung

(8 Punkte)

Gegeben sei ein Fermigas mit Spinartung $n_S = 2S + 1$ und Dichte $n_S \rho$, wobei ρ die Dichte pro Spinartung ist. In diesem Fermigas soll nun eine Dreiteilchenwechselwirkung

$$V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = \lambda \delta^{(3)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$$

eingeschaltet werden.

- Stellen Sie diese Wechselwirkung als Operator im Sinne der zweiten Quantisierung dar.
- Führen Sie ein Symbol für die Dreikörperwechselwirkung ein und formulieren Sie die zugehörigen Feynman-Regeln.
- Verwenden Sie diese Regeln, um die Wechselwirkungsenergiedichte in erster Ordnung in λ zu berechnen.
Hinweis: Beachten Sie die Symmetriefaktoren der verschiedenen Diagramme.
- Begründen Sie, warum die Wechselwirkungsenergie für $n_S \leq 2$ verschwinden muss.

3. Funktionales Feld-Integral und Wick'sches Theorem

(14 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir das funktionale Feld-Integral konstruieren. Dazu verwenden wir kohärente Vielteilchen-Zustände ($\phi_i = \phi(t, \vec{r}_i)$)

$$|\phi\rangle = e^{\sum_i \phi_i a_i^\dagger} |0\rangle, \quad \phi_i \in \mathbb{C}.$$

- (a) Überprüfen Sie, dass $a_i |\phi\rangle = \phi_i |\phi\rangle$ und $a_i^\dagger |\phi\rangle = \partial_{\phi_i} |\phi\rangle$ gelten.
 (b) Zeigen Sie anschließend, dass der Überlapp durch $\langle \theta | \phi \rangle = e^{\sum_i \theta_i^* \phi_i}$ gegeben ist.

Um das funktionale Feld-Integral zu konstruieren benötigen wir eine vollständige Basis. Wie in Aufgabenteil b) zu erkennen formen die kohärenten Zustände keine orthogonale Basis sind jedoch "vollständig". Die kohärenten Zustände bilden eine übervollständige Basis und erfüllen die Relation

$$\mathbb{1} = \int \prod_i \frac{d\text{Re}\phi_i d\text{Im}\phi_i}{\pi} e^{-\sum_i \phi_i^* \phi_i} |\phi\rangle \langle \phi|. \quad (1)$$

- (c) Verwenden Sie diese Vollständigkeitsrelation, um analog zur Aufgabe 3 von Blatt 2 eine Pfadintegraldarstellung von

$$Z[J=0] = \langle 0 | \hat{U}(t_i = -\infty, t_f = \infty) | 0 \rangle,$$

in zweiter Quantisierung zu erhalten. Welche Bedingung muss der Hamilton-Operator erfüllen? *Hinweis: Die Darstellung soll folgender Gestalt*

$$Z[J^*, J] = \int \mathcal{D}(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt [\int d^d r (\phi^*(t, \vec{r}) i \partial_t \phi(t, \vec{r}) - H(\phi^*, \phi) + J^* \phi + J \phi^*)]}$$

im Grenzfall $J, J^* \rightarrow 0$ entsprechen.

Die "Vakuum-Amplitude", die wir damit bestimmt haben, ist für $J \neq 0$ ein sogenanntes erzeugendes Funktional und erfüllt ($z_i = t_i, \vec{r}_i, \phi_i = \phi(z_i)$ und $\mathcal{D}(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) = \mathcal{D}(\phi)$)

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n^* \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J^*, J]}{\delta J(z_1) \dots \delta J^*(z_n)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}(\phi) \phi_1 \dots \phi_n^* e^{i \int dt [\int d^d r \phi^*(z) i \partial_t \phi(z) - H(\phi^*, \phi)]}. \quad (2)$$

Um die Eigenschaften dieses Funktionals näher zu bestimmen, betrachten wir einige mehrdimensionale Gauß-förmige Integrale.

- (d) Beweisen Sie, dass $\int d^n x e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{J} \vec{x}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}}$ gilt.
 (e) Vergewissern Sie sich von $\int d^n x x_i x_j e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} (A^{-1})_{i,j} = C (A^{-1})_{i,j}$.
 (f) Zeigen Sie $\int d^n x x_1 \dots x_{2n} \frac{e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}}}{C} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} (A^{-1})_{\pi(1), \pi(2)} \dots (A^{-1})_{\pi(2n-1), \pi(2n)}$.

Um den Bezug zur Physik wiederherzustellen, betrachten wir im Weiteren den Hamilton-Operator

$$H(\phi(t)) = \int \phi^*(t, \vec{r}) \nabla^2 \phi(t, \vec{r}) + g |\phi(t, \vec{r})|^4 d^d r.$$

- (g) Berechnen Sie für $g = 0$ den Korrelator $\langle \phi(\omega_1, \vec{k}_1) \phi^*(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle$ durch eine Fourier-Transformation des Exponenten in Gleichung (2).
 (h) Erklären Sie im Kontext von Aufgabenteil g) den Zusammenhang von Wick'schem Theorem und der Relation aus Aufgabenteil f). Ist Gauß-förmig eine notwendige Bedingung für das Wick'sche Theorem? Begründen Sie.
 (i) Wie würden Sie an die Berechnung des Korrelators $\langle \phi(\omega_1, \vec{k}_1) \phi^*(\omega_2, \vec{k}_2) \rangle$ heran gehen, wenn $g \neq 0$, aber $|g| \ll 1$ gälte?
 (j) Ist eine solche Beschreibung auch für Fermionen möglich? Begründen Sie.