Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2011/2012

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Besprechung 04.11.2011

---

1. Besetzungszahlen in einem idealen Fermi-Gas: (2 + 2 + 4 = 6 Punkte)

Wir bezeichnen mit n_λ die Zahl der Teilchen im Gas, die sich im Quantenzustand λ befinden. Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas. Zeigen Sie, es gilt:

(a)
$$\langle n_\lambda^2 \rangle = \langle n_\lambda \rangle,$$

(b)
$$\langle n_{\lambda_1} n_{\lambda_2} \rangle = \langle n_{\lambda_1} \rangle \langle n_{\lambda_2} \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Schwankung der Gesamtteilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ und zeigen Sie dass
$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}; \quad \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \to 0 \quad (\text{für } T \to 0).$$

2. Dynamischer Strukturfaktor (4 + 4 + 6 = 14 Punkte)

Berechnen Sie die zeitabhängige Dichte-Korrelationsfunktion (der sog. dynamische Strukturfaktor) des freien Elektronengases im Grundzustand.
Es gilt ($\hbar = 1$):
$$\hat{H} = \sum_{k,\sigma} \epsilon(k) \hat{c}^\dagger_{k,\sigma} \hat{c}_{k,\sigma}, \qquad \epsilon(k) = \frac{k^2}{2m}$$
und
$$\left\{ \hat{c}^\dagger_{k,\sigma}, \hat{c}_{k',\sigma'} \right\} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}.$$
Die Korrelationsfunktion ist definiert als
$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int d^3 r \int dt e^{-i(\mathbf{qr} - \omega t)} S(\mathbf{r}, t), \quad S(\mathbf{r}, t) = \left\langle \Psi_0^N \right| \rho_H(\mathbf{r}, t) \rho_H(0, 0) \left| \Psi_0^N \right\rangle,$$
mit der zeitabhängigen Teilchendichte im Heisenberg-Bild
$$\rho_H(\mathbf{r}, t) = \sum_\sigma \psi^\dagger_\sigma(\mathbf{r}, t) \psi_\sigma(\mathbf{r}, t), \quad \psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr})} \hat{c}_{k,\sigma}(t).$$

(a) Bestimmen Sie $\hat{c}_{k,\sigma}(t)$ über die Heisenberg-Bewegungsgleichung, mit $\hat{c}_{k,\sigma}(0) = \hat{c}_{k,\sigma}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Strukturfaktor übergeht in

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}} n_F(\mathbf{k})\left[1 - n_F(\mathbf{k}+\mathbf{q})\right]\delta\left(\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right),$$

mit $n_F(\mathbf{k}) = \theta(k_F - k)$ und k_F dem Fermi-Wellenvektor.

(c) Zeigen Sie anhand des letzten Ergebnisses, dass

$$S(\mathbf{q},\omega) \neq 0 \quad \text{nur gilt wenn} \quad \begin{cases} q < 2k_F \quad \text{und} \quad 0 < m\omega < qk_F + q^2/2 \\ q > 2k_F \quad \text{und} \quad q^2/2 - qk_F < m\omega < qk_F + q^2/2 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie in der $(q, m\omega)$ Ebene den Bereich mit $S(\mathbf{q},\omega) \neq 0$.