Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin
Dr. I.V.Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 3
Besprechung 3.5.2013

---

1. Die Einteilchen Green'sche Funktion als Pfadintegral (12 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine alternative Darstellung der Einteilchen Green'sche Funktion (im weiteren auch Propagator) mit Hilfe des Pfadintegrals erarbeitet werden und mit Hilfe dieser Darstellung eine konkrete Green'sche Funktion bestimmt werden. Zur Vereinfachung gilt in der kompletten Aufgabe $\hbar = 1$. (Sie finden Details zu diesem Formalismus in jedem modernen Buch zum Thema Quantenfeldtheorie.)

(a) Konstruktion des Pfadintegrals.
Beginnen Sie mit folgender Darstellung eines Einteilchen Propagators (T ist der Zeitordnungsoperator):

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \langle x_f|\hat{U}(t_f, t_i)|x_i\rangle = \theta(t_f - t_i) \langle x_f|Te^{-i\int_{t_i}^{t_f} dt' \hat{H}(t')}|x_i\rangle . \quad (1)$$

Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen von Gleichung (2), dass Gleichung (1) eine mögliche Darstellung der retardierten Einteilchen Green'schen Funktion ist.

$$(i\partial_{t_f} - H_{x(t_f),t_f})G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \delta(t_f - t_i) \langle x_f|\hat{U}(t_f, t_i)|x_i\rangle = \delta(t_f - t_i)\delta(x_i - x_f). \quad (2)$$

Zerlegen Sie in Gleichung (1) die Zeitspanne t_i bis t_f in geeignet kleine Elemente $[t_{n-1}, t_n]$ und entwickeln Sie $\hat{U}(t_n, t_n - 1)$. Vereinfachen Sie auch den Propagator mit Hilfe folgender Identität:

$$\mathbb{1} = \int d^d x_n \int d^d p_n \, |\vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_n|\vec{p}_n\rangle \langle \vec{p}_n| \qquad \forall n, \quad (3)$$

wobei

$$\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (4)$$

Zeigen Sie dann, dass der Propagator in Form von

$$iG(x_f, t_f; x_i, t_i) = \theta(t_f - t_i) \prod_{n=1}^{N} \left[\int d^d x_n \int d^d p_n \frac{e^{i\vec{p}_n(\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1})}}{(2\pi)^d} \delta_{\vec{x}_N, \vec{x}_f} e^{-i\Delta t \mathcal{H}(t_n, \vec{p}_n, \vec{x}_{n-1})} \right] \quad (5)$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathcal{H}$ die zum Hamilton Operator gehörende Hamilton Funktion ist und $\vec{x}_0 = \vec{x}_i$. Überlegen Sie sich, dass folgende Identität gilt

$$\langle \vec{p}_n|\hat{H}(t_n)|\vec{x}_{n-1}\rangle = \mathcal{H}(t_n, \vec{p}_n, \vec{x}_{n-1}) \frac{e^{-i\vec{x}_{n-1}\vec{p}_n}}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (6)$$

In welchen Fällen erhält man $\mathcal{H}$, indem man in $\hat{H}$ die Operatoren $\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}$ durch klassische Variablen $\vec{p}, \vec{x}$ ersetzt?

Zeigen Sie schließlich durch das Vollziehen des Kontinuumslimes, dass die Green'sche Funktion wie folgt geschrieben werden kann.

$$iG(x_f,t_f;x_i,t_i) = \theta(t_f-t_i)\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f}\mathcal{D}\vec{x}(t)\int\mathcal{D}\vec{p}(t)e^{i\int_{t_i}^{t_f}dt\,\vec{p}(t)\dot{\vec{x}}(t)-\mathcal{H}(t,\vec{p}(t),\vec{x}(t))} \tag{7}$$

Wir haben folgende Notation eingeführt:

$$\prod_{n=1}^{N}\int d^dx_n\int\frac{d^dp_n}{(2\pi)^d}\delta_{\vec{x}_N,\vec{x}_f}[\ldots]\Bigg|_{\vec{x}_0=\vec{x}_i}\xrightarrow{N\to\infty}\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f}\mathcal{D}\vec{x}(t)\int\mathcal{D}\vec{p}(t)[\ldots] \tag{8}$$

Zeigen Sie weiter, dass durch Zerlegen des Impulses in $\vec{p}(t)=\vec{p}_{cl}(t)+\vec{r}_p(t)$ (mit dem klassischen Impuls $\vec{p}_{cl}(t)$), entwickeln der Hamilton-Funktion bis einschließlich erster Ordnung in $\vec{r}_p(t)$ und anschließendem Ausintegrieren des Impulsfreiheitsgrades $\vec{r}_p(t)$, sich die Green'sche Funktion auf folgende Form bringen lässt.

$$iG(x_f,t_f;x_i,t_i) = \theta(t_f-t_i)\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f}\mathcal{D}\vec{x}(t)e^{i\int_{t_i}^{t_f}dt\,\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)} \tag{9}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an folgende Identität: $\int d^da\,e^{i\vec{a}\vec{x}}=(2\pi)^d\delta(\vec{x})$

(b) Die Approximation der stationären Phase.
Nehmen Sie an, dass $S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]=\int_{t_i}^{t_f}dt\,\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ eine stationäre Bahn $\vec{q}(t)$ hat. Entwickeln Sie um diese explizit ($\vec{x}=\vec{q}+\Delta\vec{x}$):

$$S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]\approx S[\vec{q},\dot{\vec{q}}]+\int dt_1\,\frac{\delta S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]}{\delta\vec{x}(t_1)}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{q}}\Delta\vec{x}(t_1)+\frac{1}{2}\int dt_1dt_2\Delta\vec{x}(t_1)\,\frac{\delta^2S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]}{\delta\vec{x}(t_1)\delta\vec{x}(t_2)}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{q}}\Delta\vec{x}(t_2) \tag{10}$$

Aufgrund der stationären Bedingung gilt dann:

$$\frac{\delta S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]}{\delta\vec{x}(t_1)}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{q}}=\int_{t_i}^{t_f}dt\,\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial\dot{\vec{x}}}\frac{\delta\dot{\vec{x}}(t)}{\delta\vec{x}(t_1)}+\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}{\partial\vec{x}}\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta\vec{x}(t_1)}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{q}}=0 \tag{11}$$

wobei $\frac{\delta\vec{x}(t)}{\delta\vec{x}(t_1)}=\delta(t-t_1)$ als Kronecker Symbol für kontinuierliche Systeme fungiert. Erklären Sie die physikalische Bedeutung der stationären Bahn. Begründen Sie folgende genäherte Darstellung der Greensch'schen Funktion.

$$iG(x_f,t_f;x_i,t_i)\approx\theta(t_f-t_i)e^{iS[\vec{q},\dot{\vec{q}}]}(2\pi)^{\frac{d}{2}}\det\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta^2S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]}{\delta\vec{x}(t_1)\delta\vec{x}(t_2)}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{q}}\right)^{-1/2} \tag{12}$$

(c) Berechnen Sie die Green'sche Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators ($\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$, $x(0)=x_i$ und $x(t)=x_f$) mit Hilfe von Gleichung (12).
Zeigen Sie hierfür zuerst, dass im Falle des harmonischen Oszillators Gleichung (10) eine exakte Darstellung ist.
Lösen Sie dann die klassischen Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die klassische Wirkung.
Um die Determinante zu bestimmen, gehen Sie wie folgt vor:

(i) Bestimmen Sie den Operator $\hat{O} = \frac{\delta^2 S[\vec{x},\dot{\vec{x}}]}{\delta\vec{x}(t_1)\delta\vec{x}(t_2)}\Big|_{\vec{x}=\vec{q}}$ für den harmonischen Oszillator.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte des Operators durch explizites Lösen der Differentialgleichung $\hat{O}r_n = e_n r_n$ unter Berücksichtigung der Randbedingung.
Hinweis: Der Operator wirkt auf die Fluktuationen um die klassische Trajektorie, welche Bedingung müssen die Fluktuationen bei x_i und x_f erfüllen?

(iii) Bestimmen Sie die Determinante in der Eigenbasis.
Hinweis: Verwenden Sie $\frac{z}{\sin z} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2)^{-1}$

Zeigen Sie, dass der Propagator geschrieben werden kann als:

$$iG(x_f, t; x_i, 0) = \theta(t)\left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega t)}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{2}m\omega\left([x_i^2+x_f^2]\cot(\omega t) - \frac{2x_i x_f}{\sin(\omega t)}\right)} \tag{13}$$

Betrachten Sie den Grenzfall eines freien Teilchens, vergleichen Sie dieses Ergebnis dann mit der Green'schen Funktion von Blatt 1 Aufgabe 1 und erklären Sie den Unterschied.