Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin
Dr. I. V. Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 8
Besprechung 07.06.13

---

1. Kompressibilität eines zweidimensionalen Elektronensystems (20 Punkte)

Die Kompressibilität beschreibt die relative Volumenänderung des Systems als Antwort auf eine Änderung des Drucks $K = -V^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_N$.

(a) Zeigen sie mit Hilfe der thermodynamischen Potentiale und unter Verwendung von $U = E = N\epsilon_0$ (ϵ_0 ist mittlere Energie pro Teilchen) und $V\rho = N$, dass

$$K^{-1} = \rho^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\rho\epsilon_0(\rho)\ . \tag{1}$$

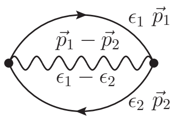
Im nächsten Schritt werden wir die Dichte und Energie eines wechselwirkungsfreien zweidimensionalen Systems in Abhängigkeit von p_F bestimmen.

(b) Bestätigen Sie die Gültigkeit von

$$\epsilon_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\rho}{m}. \tag{2}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie diese Größen im Rahmen der statistischen Mechanik bestimmt wurden und betrachten Sie anschließend den Limes $T \to 0$.

Wenden wir uns nun dem wechselwirkenden System zu. Unser Ziel ist es, die Energiekorrektur des Fock-Diagramms zu bestimmen. Also

$$\frac{E_{\text{Fock}}}{V} = i$$ 

. (3)

(c) Berechnen Sie die Energiekorrektur des Fock-Diagramms in 2D analog zu Aufgabe 2 von Blatt 6, wobei die Fouriertransformierte der Coulombwechselwirkung in 2D $V(\boldsymbol{q}) = 2\pi e^2/q$ lautet.

(d) Ermitteln Sie die Kompressibilität des Systems unter Berücksichtigung der Fock-Korrektur. Drücken Sie das Ergebnis durch $r_s = a_0^{-1}(\pi\rho)^{-2}$ (a_0 ist der Bohrradius) aus. Was fällt Ihnen auf?

Nähere Informationen zur Messbarkeit der Kompressibilität zweidimensionaler Systeme finden Sie bei J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer und K.W. West in Phys. Rev. Lett. **68**, 674677 (1992) oder Phys. Rev. B **50**, 17601778 (1994).

2. Selbstenergiekorrektur durch Phononen (30 Punkte)

Der Hamiltonian für die Wechselwirkung von Leitungselektronen mit longitudinalen Phononen ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\text{int}} = g\int d^3\boldsymbol{r}\,\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

wobei $\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},t)$ das auf Blatt 4 eingeführte Phononfeld bezeichnet. Die Green'sche Funktion dieses Feldes ist gegeben durch

$$D(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega^2 - \omega_{\boldsymbol{k}}^2 + i0}, \tag{5}$$

wobei $\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ (vgl. Blatt 4, Aufgabe 1). Es gilt, die durch die Wechselwirkung der Elektronen mit den Phononen verursachte Selbstenergiekorrektur $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ in führender Ordnung in g zu berechnen.

(a) Formulieren Sie die Feynman-Regeln für das Elektron-Phonon-System im Impulsraum.

(b) Für die Selbstenergie $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ ergeben sich in führender Ordnung in g zunächst zwei Diagramme. Zeichnen Sie diese Diagramme. Begründen Sie, warum eines dieser Diagramme physikalisch irrelevant ist und somit keinen Beitrag zu $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ leistet.

Im Weiteren soll nur das physikalisch relevante Diagramm betrachtet werden.

(c) Geben Sie $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ mit Hilfe der Feynman-Regeln in Integralform an und führen Sie die Energieintegration der Schleife aus.
Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon) = \frac{g^2 c}{16\pi^3} \int d^3\boldsymbol{k}\, k \left\{ \frac{\theta(-\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})}{\epsilon + ck - \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} - i0} + \frac{\theta(\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})}{\epsilon - ck - \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} + i0} \right\} \tag{6}$$

wobei $\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} \equiv \frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2}{2m} - \mu$.

Der Debye-Wellenvektor k_{D} ist definiert als der Radius der Kugel im reziproken Raum, die genau so viele Zustände enthält, wie es longitudinale Phononmoden gibt. Die Debye-Frequenz ist definiert durch $\omega_{\mathrm{D}} = ck_{\mathrm{D}}$.

(d) Wieviele solcher Moden gibt es in einem einfach kubischen Kristallgitter mit N Atomen? Bestimmen Sie k_{D} als Funktion der Atomdichte N/V. Vergleichen Sie die Größenordnung von k_{D} mit der des Fermi-Wellenvektors k_{F}. Überlegen Sie sich, warum die $\boldsymbol{k}$-Integration in (6) auf eine Kugel $|\boldsymbol{k}| < k_{\mathrm{D}}$ begrenzt werden muss.

Der Integrand in (6) hängt sowohl vom Betrag $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ als auch über $\epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}$ vom Winkel ϑ zwischen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{p}$ ab. Es empfiehlt sich, die Winkelintegration innerhalb der k-Integration (also bei gegebem Wert von k) in eine Integration über den Parameter $\xi \equiv \epsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}$ umzuschreiben. Im Weiteren wollen wir $\mathrm{Im}\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ für $\epsilon \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$, $p \equiv |\boldsymbol{p}| \approx p_{\mathrm{F}}$ betrachten.

(e) Schreiben Sie die Winkelintegration in eine Integration über ξ um und bestimmen Sie die Integralgrenzen $\xi_{\min}$ und $\xi_{\max}$.

(f) Geben Sie zunächst einen exakten Ausdruck für den Imaginärteil von $\Sigma(\boldsymbol{p},\epsilon)$ an. Überlegen Sie sich, warum wir näherungsweise die Integralgrenzen für ξ auf $-\infty$ bis ∞ aufweiten dürfen und berechnen Sie $\mathrm{Im}\Sigma(\epsilon)$ in dieser Näherung.

Hinweis: Die Schallgeschwindigkeit c ist in Metallen um einen Faktor der Größenordnung 10^2 kleiner als die Fermigeschwindigkeit v_{F}.

(g) Begründen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Rechnung physikalisch, warum $\mathrm{Im}\Sigma(\epsilon)$ für kleine ϵ proportional zu ϵ^3 ist. Steht dieses Ergebnis im Einklang mit Landau's Fermiflüssigkeits-Hypothese?