**Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13**

Prof. A. Mirlin
Dr. I. V. Protopopov, U. Briskot, E. König

**Blatt 10**
**Besprechung 21.06.13**

---

**1. Polarisationsoperator in Graphen am Dirac-Punkt** (20 Punkte)

Die Abschirmung der Coulombwechselwirkung in der *Random-Phase-Approximation* (RPA) ist bestimmt durch den Polarisationsoperator $\Pi(\omega, \boldsymbol{q})$. Aus der Vorlesung ist der Polarisationsoperator für Fermiflüssigkeiten bekannt. Ziel dieser Aufgabe ist es, $\Pi(\omega, \boldsymbol{q})$ für Graphen (s. Blatt 7, Aufgabe 2) bei halber Füllung ($\mu = 0$) und $T = 0$ zu berechnen.

Der Polarisationsoperator für einen einzelnen Dirac-Kegel in Graphen ist gegeben durch

$$\Pi(\omega, \boldsymbol{q}) = \mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^2 p}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi} \mathrm{Tr}[G(\varepsilon - \omega, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) G(\varepsilon, \boldsymbol{p})] \, . \tag{1}$$

Hierbei ist $G(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ die Greensche Funktion für Graphen ohne Wechselwirkung von Blatt 7, Aufgabe 2 und $\mathrm{Tr}[\dots]$ bedeutet die Spur im Pseudospinraum.

(a) Werten Sie die Spur in Gl. (1) aus. Benutzen Sie die Darstellung der matrixwertigen Greenschen Funktion durch die Projektoren $P_{\lambda,\boldsymbol{p}} = (1 + \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}/p)/2$ ($\lambda = \pm 1$) von Blatt 7 ($\varepsilon_{\lambda,p} = \lambda v_F p - \mu$):

$$G(\varepsilon, \boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda = \pm 1} P_{\lambda,\boldsymbol{p}} \, G_\lambda(\varepsilon, p) \, , \quad G_\lambda(\varepsilon, p) = (\varepsilon - \varepsilon_{\lambda,p} + \mathrm{i}0 \, \mathrm{sign}(\varepsilon_{\lambda,p}))^{-1} \, . \tag{2}$$

*Hinweis:* $\mathrm{Tr}[P_{\lambda,\boldsymbol{p}} P_{\lambda',\boldsymbol{p}'}] = [1 + \lambda\lambda' \cos\sphericalangle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')]/2$. Im Folgenden setzen wir $v_F = 1$.

(b) Führen Sie nun die Energieintegration über $\varepsilon$ aus. Nehmen Sie dabei $\mu = 0$ an. Überlegen Sie sich dazu, welche Kombinationen von Energien $\varepsilon_{\lambda,p}$ und $\varepsilon_{\lambda',|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}$ beitragen. Welchen physikalischen Prozessen entsprechen diese?

Es bietet sich an elliptische Koordinaten

$$\xi = p + |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}| \, , \tag{3}$$
$$\eta = p - |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}| \, , \tag{4}$$

für die verbleibende Impulsintegration zu wählen.

(c) Zeigen Sie

i)
$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \frac{2q^2 - \eta^2 - \xi^2}{\eta^2 - \xi^2} \tag{5}$$

ii)
$$\mathrm{d}^2 p = \frac{1}{4} \frac{\xi^2 - \eta^2}{\sqrt{(q^2 - \eta^2)(\xi^2 - q^2)}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{6}$$

*Hinweis: Verwenden Sie ein Koordinatensystem in dem* $\boldsymbol{q} = (q, 0)^T$.

(d) Führen Sie die verbleibende Impulsintegration aus und bestimmen Sie $\Pi(\omega, \boldsymbol{q})$.
*Hinweis:* $\int_1^\infty dx \frac{x}{\sqrt{x^2-1}(\omega^2 - q^2x^2)} = \frac{-\pi}{2q\sqrt{q^2-\omega^2}}$.

(e) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat für Fermiflüssigkeiten aus der Vorlesung.

i) Vergleichen Sie die Thomas-Fermi Abschirmlänge.

ii) Betrachten Sie $\Pi(\omega, \boldsymbol{q} = 0)$. Warum müssen in diesem Grenzfall der Polarisationsoperator für Graphen und für die Fermiflüssigkeit übereinstimmen?

iii) Was ist die Ursache für die Divergenz bei $\omega = q$?
*Hinweis:* Überlegen Sie sich, welche kinematischen Einschränkungen die Bedingung $\omega = q$ an die möglichen Anregungsprozesse zweier Teilchen stellt. Untersuchen Sie insbesondere die relative Orientierung der Impulse der Teilchen.

**2. Analytische Eigenschaften der Green'schen Funktion** (10 Punkte)

Eine geschickte Methode, um Matsubara-Diagramme auszuwerten, macht sich die analytischen Eigenschaften der Green'schen Funktion zu Nutze. Mit dieser Methode lässt sich in jedem Diagramm die explizite Summation über Matsubara-Frequenzen durchführen. Betrachten Sie als Beispiel die Elektron-Selbstenergie durch Phonon-Wechselwirkung in zweiter Ordnung,

$$\Sigma(\epsilon_n, \mathbf{p}) = -g^2 T \sum_{\omega_m} \int G(\epsilon_n - \omega_m, \mathbf{p} - \mathbf{q}) D(\omega_m, \mathbf{q}) \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}. \tag{7}$$

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Beziehung

$$G(\epsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im} G_R(\epsilon, \mathbf{p})}{\epsilon - i\epsilon_n} d\epsilon \tag{8}$$

zwischen Matsubara- und retardierter Green'scher Funktion die Darstellung

$$\begin{aligned} \Sigma(\epsilon_n, \mathbf{p}) &= \frac{g^2}{2\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon (\tanh\frac{\epsilon}{2T} + \coth\frac{\omega}{2T}) \\ &\times \frac{\mathrm{Im} G_R(\epsilon, \mathbf{p} - \mathbf{q})\, \mathrm{Im} D_R(\omega, \mathbf{q})}{i\epsilon_n - \epsilon - \omega}, \end{aligned} \tag{9}$$

her, in der die Integration über reelle $\epsilon$ und $\omega$ durchzuführen ist. Wie sieht diese Gleichung für die retardierte Selbstenergie aus?
*Hinweis: Überlegen Sie sich, was die Konsequenz aus Gl.*(8) *ist.*

(b) Betrachten Sie nun die inverse Lebenszeit des Elektrons, welche proportional zu $\mathrm{Im}\Sigma_R(\epsilon, \mathbf{p})$ ist. Welche Frequenzen $\omega$ tragen hauptsächlich zu Gleichung (9) bei? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.