Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie II SS 13

Prof. A. Mirlin
Dr. I. V. Protopopov, U. Briskot, E. König

Blatt 11
Besprechung 28.06.13

---

1. Die Zustandssumme als funktionales Feldintegral (10 Punkte)

Auf Blatt 3 haben Sie bereits das quantenmechanische Pfadintegral kennengelernt und auf Blatt 9 das funktionale Feldintegral kohärenter bosonischer Zustände bei $T = 0$. In dieser Aufgabe soll die Zustandssumme $Z = \operatorname{tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$ für Fermionen bei endlicher Temperatur $T = 1/\beta$ durch ein funktionales Feldintegral dargestellt werden.

(a) Zeigen Sie:

$$i)\int \prod_i \mathrm{d}\psi_i^* \mathrm{d}\psi_i e^{-\vec{\psi}^*\vec{\psi}} \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| = \mathbb{1} \text{ und } ii) \quad \mathrm{tr}A = \int \prod_i \mathrm{d}\psi_i^* \mathrm{d}\psi_i e^{-\vec{\psi}^*\vec{\psi}} \left\langle -\psi\right| A \left|\psi\right\rangle$$

Hierbei sind $|\psi\rangle$ die auf Blatt 9 eingeführten fermionischen kohärenten Zustände und A ein Operator.

(b) Gehen Sie nun analog zu Blatt 3 und Blatt 9 vor und zeigen Sie:

$$Z = \int \mathcal{D}(\psi^*, \psi) e^{-S[\psi^*,\psi]}, \quad S[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \left[\int \mathrm{d}^d r \psi^* \partial_\tau \psi + \mathcal{H}(\psi^*, \psi) - \mu \mathcal{N}(\psi^*, \psi)\right] \tag{1}$$

(c) Überlegen Sie sich durch Vergleich mit Gl. (2) von Blatt 9, was sich an Gl. (1) ändert, wenn die Zustandssumme für bosonische Zustände konstruiert werden soll. *Hinweis: Erinnern Sie sich an die Periodizität der Green's Funktion und betrachten Sie $\psi(\tau, \vec{r})$.*

2. Supraleiter aus der Sicht des Feldintegrals (16 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir die Technik der Feldintegrale auf den Phasenübergang Normalleiter-Supraleiter anwenden. [1]

Betrachten Sie den Hamiltonoperator in der Sprache der zweiten Quantisierung ($\psi_\sigma = \psi_\sigma(\vec{r})$ bezeichnet Feldoperatoren)

$$H = \int \mathrm{d}^d r \left[\psi_\sigma^\dagger \frac{-\nabla^2}{2m} \psi_\sigma - g \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow\right]. \tag{2}$$

(a) Erklären Sie die Form und das Vorzeichen der Wechselwirkung: $-g\psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow$.

(b) Schreiben Sie die Zustandssumme für dieses Problem in Feldintegraldarstellung.

[1] Genau genommen betrachten wir hier den Übergang Normalleiter-Supraflüssigkeit.

Nun führen wir eine Hubbard-Stratonovich-Transformation durch, um die Vierpunkt-Wechselwirkung in eine quadratische Form zu überführen ($\Delta = \Delta(\vec{r}, \tau)$).

$$e^{g \int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r \, \psi_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow} = \int \mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta) e^{-\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r \left[\frac{|\Delta|^2}{g} - \left(\bar{\Delta} \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \Delta \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \right) \right]} \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie durch Ausintegrieren des Δ-Feldes die Gültigkeit von Gleichung (3). *Hinweis: $\mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta)$ ist nicht das "gewöhnliche" bosonische Integralmaß.*

Als nächstes führen wir den sogenannten Nambu-Spinor und die Gor'kov-Greensche Funktion ein:

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\uparrow & \psi_\downarrow \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \bar{\psi}_\downarrow \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \Delta \\ \bar{\Delta} & -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(d) Finden Sie mit Hilfe der Nambu-Spinoren und der Gor'kov-Greenschen Funktion (Gl.(4)) eine einfachere Darstellung von Gleichung (2) und integrieren Sie anschließend die fermionischen Felder aus.
Hinweis: Sie sollten

$$Z = \int \mathcal{D}(\bar{\Delta}, \Delta) \, e^{-\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d r \frac{|\Delta|^2}{g} + \mathrm{tr} \log \mathbb{G}^{-1}} \tag{5}$$

als Ergebnis erhalten ($\mathrm{tr}(\dots)$ *beinhaltet auch Integration über τ und $\vec{r}$).*

Die im Weiteren diskutierte Physik wird sich auf Gleichung (5) stützen.

Die "Mean-field"-Theorie:

(d) Bestimmen Sie die Sattelpunktsgleichung = Mean-Field-Gleichung = Euler-Lagrange Bewegungsgleichung für das Feld $\Delta(\vec{r})$ im Ortsraum. *Hinweis: Variieren Sie die Wirkung in Gln.* (5) *wie üblich* $\Delta(\vec{r}) \to \Delta(\vec{r}) + \delta\Delta(\vec{r})$.

(e) Es ist natürlich anzunehmen, dass am Sattelpunkt $\Delta = \Delta_0 \neq \Delta(\vec{r})$ (Warum?). Unter dieser Annahme können Sie die Sattelpunktsgleichung am besten im Fourierraum darstellen. Verwenden Sie anschließend das Ergebnis von Blatt 9, Aufgabe 2 um Ihre Bewegungsgleichung in die bekannte Form zu überführen. *Hinweis: Erinnern Sie sich auch an den Ultravioletten cut-off in der Theorie phononübermittelter Paarungswechselwirkung.*

(f) Bestimmen Sie T_c und das Temperaturverhalten der Bandlücke in der Nähe der Übergangstemperatur ($0 \ll T \lesssim T_c$). Lösen Sie am Ende nach Δ auf und skizzieren Sie $\Delta(T)$. *Hinweis: Erinnern Sie sich an Blatt 13 in TKM I WS 12/13.*

Ginzburg-Landau Theorie und spontane Symmetriebrechung: Wir werden den Logarithmus in Gleichung (5) entwickeln, um eine effektive Wirkung für Δ (bei $T \sim T_c$) zu erhalten.

(g) Verwenden Sie die Dyson-Gleichung und zeigen Sie:

$$\mathrm{tr} \log \mathbb{G}^{-1} = \text{const.} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \mathrm{tr}[(\mathbb{G}_0 \hat{\Delta})^{2n}] \quad \text{mit } \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \bar{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbb{G}_0 = \mathbb{G}|_{\Delta=0}. \tag{6}$$

(h) Das Ginzburg-Landau-Funktional für die freie Energie $F = TS[\Delta, \Delta^*]$ hat die Form

$$F = \int d^d x \left[\alpha |\nabla \Delta|^2 + \frac{1}{2} r(T) |\Delta|^2 + u |\Delta|^4 \right] \tag{7}$$

Erklären Sie das Zustandekommen der Vorfaktoren ("Kopplungskonstanten") α, r, u diagrammatisch und mit Hilfe der vorigen Teilaufgabe. *Hinweis: Keine Rechnung! Das Ergebnis ist*

$$\frac{\nu_F}{2} \frac{T - T_c}{T_c} \approx \frac{1}{2} r(T) \tag{8}$$

$$\textit{und } u \approx \text{const.} \times \rho_F T^{-3}. \tag{9}$$

(i) Diskutieren Sie die effektive Wirkung und ihre physikalische Bedeutung. *Wie sieht das effektive Potential für $T > T_c$ und $T < T_c$ aus? Bestimmen Sie erneut den Erwartungswert der Bandlücke als Funktion von T. Welche Symmetrie wird gebrochen? Was ist ein Goldstoneboson?*