

## Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman  
Dr. B. NarozhnyBlatt 9  
Besprechung 17.06.2014

## 1. Erwartungswert, Variation und Unschärfe-Relation:

Gegeben sei die Wellenfunktion eines Teilchens in 1-D:

$$\psi(x) = \mathcal{N} (a + bx + cx^2) \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right],$$

wobei  $a, b$  und  $c$  reell sind.

- Bestimmen Sie den Normierungskoeffizient  $\mathcal{N}$ .
- Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle$  und  $\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ . Hier ist  $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$  der Impulsoperator.
- Berechnen Sie die Variationen  $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$  und  $(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$  und überzeugen Sie sich, dass die Unschärfe-Relation  $(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar/2$  gilt.

*Hinweis:*

$$\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

## 2. Spin-1/2 (Quantenbit):

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unschärferelationen eng verknüpft sind mit den Kommutatoren von Operatoren. Im allgemeinen gilt

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

wobei  $[\hat{A}, \hat{B}]$  ein Kommutator ist:  $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .Bei Spin 1/2 werden die so genannten *Pauli-Matrizen*  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) benutzt

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Spinoperator ist dabei definiert als  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ .

- Überprüfen Sie mit einer expliziten Rechnung dass die Pauli-Matrizen den folgenden Relationen genügen

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i \sigma_z & [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i \sigma_x & [\sigma_x, \sigma_z] &= -2i \sigma_y \\ \sigma_x^2 &= 1 & \sigma_y^2 &= 1 & \sigma_z^2 &= 1 \end{aligned}$$

b) Der Zustand des Spin-1/2 (Quantenbits) ist gegeben durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle .$$

Hier  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind die Eigenzustände des Operators  $\sigma_z$ :  
 $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$  und  $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ . Bestimmen Sie die Erwartungswerte  $\langle \hat{S}_i \rangle$  und die Variationen  $(\Delta S_i)^2$  für  $i = x, y, z$  für den Zustand  $|\psi\rangle$ .

c) Überprüfen Sie für den Zustand  $|\psi\rangle$  die Unschärferelationen

$$\begin{aligned} (\Delta S_x)^2(\Delta S_y)^2 &\geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_x, \hat{S}_y] \rangle \right)^2 \\ (\Delta S_x)^2(\Delta S_z)^2 &\geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_x, \hat{S}_z] \rangle \right)^2 \\ (\Delta S_y)^2(\Delta S_z)^2 &\geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \rangle \right)^2 \end{aligned}$$