KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 1: Lösungen
Besprechung 22.04.2014

---

1. Freiheitsgrade:

Die Anzahl der Freiheitsgrade - $\mathcal{N}$.

(a) "Ein einfacher Massenpunkt in d Dimensionen": $\mathcal{N} = d$.

(b) "Eine Kugel, bei der die räumliche Ausdehnung nicht vernachlässigt werden soll"

$$d = 3 : \quad \mathcal{N} = 3 + 3 = 6; \qquad d = 2 : \quad \mathcal{N} = 2 + 1 = 3.$$

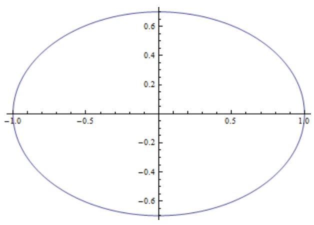
(c) "Ein sphärisches Pendel": $\mathcal{N} = 2$.

(d) "Zwei gekoppelte Pendel in einer Ebene": $\mathcal{N} = 2$

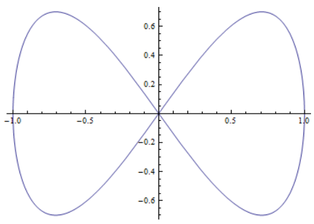
2. Bahn/Raumkurven:

(a) $\vec{r}(t) = (a\cos(\omega_1 t), b\sin(\omega_2 t))$

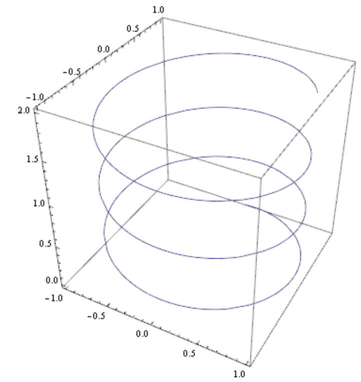
i) $\omega_2 = \omega_1$



ii) $\omega_2 = 2\omega_1$



(b) $\vec{r}(t) = (a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), ct)$



Der Abstand zweier in z-Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $h = z_2 - z_1$:

Punkt 1:

$$(1, 0, z_1) \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 0.$$

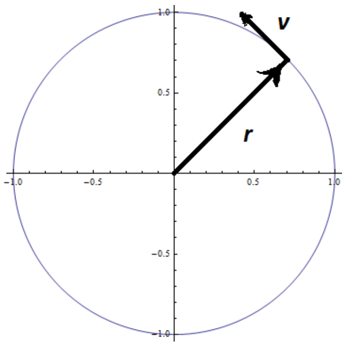
Punkt 2:

$$(1, 0, z_2) \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad z_2 = c\frac{2\pi}{\omega}.$$

Abstand:

$$h = 2\pi\frac{c}{\omega}.$$

(c) $\vec{r}(t) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0)$.



Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -r\omega\left(\sin(\omega t), -\cos(\omega t), 0\right)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = -r\omega^2\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\right) = -\omega^2\vec{r}(t)$$

Geschwindigkeit eines Satelliten:

$$\vec{F} = m_s\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -m_s\omega^2\vec{r} = -G\frac{m_s M_E}{r^3}\vec{r} \quad \rightarrow \quad \omega^2 = G\frac{M_E}{r^3}$$

$$\vec{v}(t) = -\sqrt{\frac{GM_E}{r}}\left(\cos t\sqrt{\frac{GM_E}{r^3}}, -\sin t\sqrt{\frac{GM_E}{r^3}}, 0\right)$$

(d) “Drehimpuls”

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Drehimpuls den Satelliten

$$\vec{L} = -m_s \omega r^2 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = m_s \omega r^2 \vec{e}_z = m_s \sqrt{GM_E r}\ \vec{e}_z$$

Erhaltung von Drehimpuls:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ ist erhalten}$$

3. Rotierende Scheibe:

(a) “Drehimpuls”

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\omega^2 r \vec{e}_z$$

(b) “Erhaltung von Drehimpuls”

$$\vec{L}(r_{in}) = \vec{L}(r) \quad \Rightarrow \quad \omega(r_{in}) r_{in}^2 = \omega(r) r^2 \quad \rightarrow \quad \omega(r) = \omega(r_{in}) \frac{r_{in}^2}{r^2}$$

(c) “Arbeit”

$$W = \int_{r_{in}}^{r} dr' F(r') = m \int_{r_{in}}^{r} dr' \omega^2(r') r' = m\omega^2(r_{in}) r_{in}^4 \int_{r_{in}}^{r} \frac{dr'}{(r')^3} = \frac{1}{2} m\omega^2(r_{in}) r_{in}^2 \left(1 - \frac{r_{in}^2}{r^2}\right)$$

(d) “Zunahme der kinetischen Energie”

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m\omega^2(r) r^2 - \frac{1}{2} m\omega^2(r_{in}) r_{in}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2(r_{in}) r_{in}^2 \left(\frac{r_{in}^2}{r^2} - 1\right)$$

$$\Delta E_{kin} = -W$$

4. Stoßkinematik:

(a) Erhaltung des Gesamptimpulses

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_2 v_2' - m_1 v_1' = p_0$$

(b) Erhaltung der Gesamptenergie

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = E_0$$

(c) In allgemein

$$m_2v_2' = m_1v_1' + p_0 \quad \to \quad m_1m_2v_1'^2 + (m_1v_1' + p_0)^2 = 2E_0m_2$$

deswegen

$$v_1'^2 + \frac{2p_0}{m_1+m_2}v_1' + \frac{p_0^2 - 2E_0m_2}{m_1(m_1+m_2)} = 0$$

Die "physikalische" Lösung der quadratischen Gleichung

$$v_1' = -\frac{p_0}{m_1+m_2}\left[1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{2\frac{(m_1+m_2)E_0}{p_0^2} - 1}\right]$$

$$v_2' = \frac{p_0}{m_1+m_2}\left[1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\sqrt{2\frac{(m_1+m_2)E_0}{p_0^2} - 1}\right]$$

Für $v_2 = 0$ und $m_1 = m_2$ ergibt die Lösung

$$p_0 = m_1v_1, \quad E_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \to \quad 2\frac{(m_1+m_2)E_0}{p_0^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad v_1' = 0, \quad v_2' = v_1.$$

5. Wurf eines Balles:

Die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -mg\vec{e}_z.$$

In Komponenten (die Lösung stellt auf die Randbedingungen ab):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = vt\cos\alpha$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad \Rightarrow \quad z = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Die Bahnkurve

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$$

Die Maximale Wurfdistanz:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\tan\alpha - \frac{gx}{2v^2\cos^2\alpha}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{v^2}{g}2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha$$

Winkel α_{max}:

$$\max(\sin 2\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{max} = \frac{\pi}{4}$$