KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE
DER KONDENSIERTEN MATERIE

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 10: Lösungen
Besprechung 01.07.2014

---

1. Teilchen mit Spin im Magnetfeld:

(a) "Die Eigenzustände"

Der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{e}{mc}\hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{B}$$

Das Magnetfeld

$$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$$

Der Spin:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$$

Deswegen finden wir

$$\hat{H} = \frac{e\hbar}{2mc}B_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Eigenzustände:

$$\hat{H}\psi_\pm = E_\pm\psi_\pm$$

$$\psi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$E_\pm = \pm\frac{e\hbar}{2mc}B_0$$

(b) "Die Wahrscheinlichkeiten"

Stellen wir den Zustand ψ als eine Linearkombination der Eigenzustände

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\psi_+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_- = C_+\psi_+ + C_-\psi_-,$$

$$C_+ = \frac{1}{2}, \qquad C_- = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die Wahrscheinichkeiten

$$W_\pm = |C_\pm|^2$$

$$W_+ = \frac{1}{4}, \qquad W_- = \frac{3}{4}$$

(c) "Die Zeitentwicklung"

Die Zeitentwicklung eines Eigenzustandes:

$$\psi_+(t) = \psi_+(0)e^{-iE_+t/\hbar}$$

Die Zeitentwicklung des Zustandes ψ:

$$\psi(t) = C_+\psi_+(0)e^{-iE_+t/\hbar} + C_-\psi_-(0)e^{-iE_-t/\hbar}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ieB_0t/(2mc)}$$

(d) "Die Larmorfrequenz"

Finden wir die Erwartungswerte der Spinoperatoren

$$\left\langle \hat{S}_z \right\rangle = \left\langle \psi(t) \middle| \hat{S}_z \middle| \psi(t) \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\psi^\dagger(t)\hat{\sigma}_z\psi(t) =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}e^{-ieB_0t/(2mc)}\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ieB_0t/(2mc)}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}e^{-ieB_0t/(2mc)}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ieB_0t/(2mc)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ieB_0t/(2mc)}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right] = -\frac{\hbar}{4}$$

$$\left\langle \hat{S}_x \right\rangle = \left\langle \psi(t) \left| \hat{S}_x \right| \psi(t) \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger(t) \hat{\sigma}_x \psi(t) =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} \right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} \right]$$

$$= \frac{\hbar\sqrt{3}}{8} \left[e^{ieB_0t/(mc)} + e^{-ieB_0t/(mc)} \right] = \frac{\hbar\sqrt{3}}{4} \cos \frac{eB_0t}{mc}$$

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle = \left\langle \psi(t) \left| \hat{S}_y \right| \psi(t) \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \psi^\dagger(t) \hat{\sigma}_y \psi(t) =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} \right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} \right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ieB_0t/(2mc)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ieB_0t/(2mc)} \right]$$

$$= \frac{i\hbar\sqrt{3}}{8} \left[-e^{ieB_0t/(mc)} + e^{-ieB_0t/(mc)} \right] = \frac{\hbar\sqrt{3}}{4} \sin \frac{eB_0t}{mc}$$

Die Larmorfrequenz:

$$\omega = \frac{eB_0}{mc}$$

2. Potentialbarriere:

Die asymptotische Form der Wellenfunktion:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A(E)e^{-ikx} & x \to -\infty \\ C(E)e^{ikx} & x \to \infty \end{cases}$$

Der Reflexionskoeffizent

$$R(E) = |A(E)|^2.$$

Der Transmissionionskoeffizent

$$T(E) = |C(E)|^2.$$

(a) “$E > V_0$”

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung finden wir in der Form:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x < -a/2 \\ B_1 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} & -a/2 < x < a/2 \\ Ce^{ikx} & x > a/2 \end{cases}$$

wobei

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}, \qquad q = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}.$$

Die Koeffizienten finden wir von den Randbedingungen:

$$\psi\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right), \qquad \psi'\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi'\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right).$$

Am $x = -a/2$ finden wir

$$e^{-ika/2} + Ae^{ika/2} = B_1 e^{-iqa/2} + B_2 e^{iqa/2}, \tag{1}$$

und

$$ik\left(e^{-ika/2} - Ae^{ika/2}\right) = iq\left(B_1 e^{-iqa/2} - B_2 e^{iqa/2}\right). \tag{2}$$

Am $x = a/2$ finden wir

$$Ce^{ika/2} = B_1 e^{iqa/2} + B_2 e^{-iqa/2}, \tag{3}$$

und

$$ikCe^{ika/2} = iq\left(B_1 e^{iqa/2} - B_2 e^{-iqa/2}\right). \tag{4}$$

Wir haben vier linearen Gleichungen und vier Unbekannten. Die Lösung ist

$$A = e^{-ika}\frac{i\left(q^2 - k^2\right)\sin qa}{2kq\cos qa - i\left(q^2 + k^2\right)\sin qa} \quad \Rightarrow \quad R(E) = \frac{\left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}{4k^2q^2 + \left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}$$

$$C = e^{-ika}\frac{2kq}{2kq\cos qa - i\left(q^2 + k^2\right)\sin qa} \quad \Rightarrow \quad T(E) = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + \left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}$$

(b) "$E < V_0$"

Die Lösung ist ähnlich, mit $q \to i\varkappa$, $\hbar\varkappa = \sqrt{2m(V-E)}$. Das Ergebnis ist

$$R(E) = \frac{\left(\varkappa^2 + k^2\right)^2 \sinh^2 qa}{4k^2\varkappa^2 + \left(\varkappa^2 + k^2\right)^2 \sinh^2 qa}, \qquad T(E) = \frac{4k^2\varkappa^2}{4k^2\varkappa^2 + \left(\varkappa^2 + k^2\right)^2 \sinh^2 qa}$$

(c) "Die Beziehung zwischen T und R"

$$T + R = 1$$