Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 11: Lösungen
Besprechung 04.07.2014

1. Streuung an dem Potentialtopf:

Die asymptotische Form der Wellenfunktion:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A(E)e^{-ikx} & x \to -\infty \\ C(E)e^{ikx} & x \to \infty \end{cases}, \qquad \hbar k = \sqrt{2mE}, \qquad E > 0$$

Der Reflexionskoeffizent

$$R(E) = |A(E)|^2.$$

Der Transmissionionskoeffizent

$$T(E) = |C(E)|^2.$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung finden wir in der Form:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & x < -a/2 \\ B_1 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} & -a/2 < x < a/2 \\ Ce^{ikx} & x > a/2 \end{cases}$$

wobei

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}, \qquad q = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+V)}.$$

Die Koeffizienten finden wir von den Randbedingungen:

$$\psi\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right), \qquad \psi'\left(\pm\frac{a}{2} - 0\right) = \psi'\left(\pm\frac{a}{2} + 0\right).$$

Am $x = -a/2$ finden wir

$$e^{-ika/2} + Ae^{ika/2} = B_1 e^{-iqa/2} + B_2 e^{iqa/2}, \tag{1}$$

und

$$ik\left(e^{-ika/2} - Ae^{ika/2}\right) = iq\left(B_1 e^{-iqa/2} - B_2 e^{iqa/2}\right). \tag{2}$$

Am $x = a/2$ finden wir

$$Ce^{ika/2} = B_1 e^{iqa/2} + B_2 e^{-iqa/2}, \tag{3}$$

und

$$ikCe^{ika/2} = iq\left(B_1 e^{iqa/2} - B_2 e^{-iqa/2}\right). \tag{4}$$

Wir haben vier linearen Gleichungen und vier Unbekannten. Die Lösung ist

$$A = e^{-ika} \frac{i\left(q^2 - k^2\right)\sin qa}{2kq\cos qa - i\left(q^2 + k^2\right)\sin qa} \quad \Rightarrow \quad R(E) = \frac{\left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}{4k^2q^2 + \left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}$$

$$C = e^{-ika} \frac{2kq}{2kq\cos qa - i\left(q^2 + k^2\right)\sin qa} \quad \Rightarrow \quad T(E) = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + \left(q^2 - k^2\right)^2 \sin^2 qa}$$

2. Harmonischer Oszillator I:

(a) Lösung I

Die Wellenfunktion sei

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} = \mathcal{N} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

wobei $\mathcal{N}$ die Normierungskonstante ist.
Die Schrödingergleichung ist

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi = E\psi$$

mit

$$\hat{V} = \frac{kx^2}{2}$$

Setzen wir die Funktion ψ_0 ein:

$$\hat{p}\psi_0 = -i\hbar\mathcal{N}\frac{\partial}{\partial x} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} = i\hbar\mathcal{N}\frac{m\omega x}{\hbar} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} = i\mathcal{N} m\omega x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$\hat{p}^2\psi_0 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left[i\mathcal{N} m\omega x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\right] = \mathcal{N}\left[m\hbar\omega - m^2\omega^2x^2\right] e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

$$= m\left[\hbar\omega - m\omega^2x^2\right]\psi_0(x)$$

Deswegen

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi_0 = \left[\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]\psi_0(x)$$

Die Funktion $\psi_0(x)$ ist die Lösung der Schrödingergleichung wenn

$$k = m\omega^2.$$

Dann

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0(x)$$

und die Energie des Grundzustands

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

(b) Lösung II

Bemerken Sie, dass man die Schrödingergleichung umschreiben kann:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{k}x - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\sqrt{k}x + \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{\partial}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Weil

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega,$$

bekommen wir

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = \frac{1}{2m}\left[m\omega x - \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Wirken wir jetzt mit diesem Hamiltonoperator auf der Funktion $\psi_0(x)$:

$$\left[m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi_0(x) = \left[m\omega x - \hbar\frac{m\omega x}{\hbar}\right]\psi_0(x) = 0.$$

Deswegen

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0$$