Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 12: Lösungen
Besprechung 08.07.2014

---

1. Harmonischer Oszillator:

(a) "Wellenfunktionen der angeregten Zustände"

Der erste angeregte Zustand:

$$|1\rangle = N\hat{a}^\dagger|0\rangle,$$

wobei N die Normierungskonstante ist.
Explizit:

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger|0\rangle &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left[m\omega x - \hbar\frac{d}{dx}\right]e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}2m\omega x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.\end{aligned}$$

In diesem Fall $N = 1$ und

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Der zweite angeregte Zustand:

$$|2\rangle = N\hat{a}^\dagger|1\rangle.$$

Explizit:

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger|1\rangle &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left[m\omega x - \hbar\frac{d}{dx}\right]x e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\hbar}\left(2m\omega x^2 - \hbar\right)e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.\end{aligned}$$

Hier $N = 1/\sqrt{2}$ und

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(2m\omega x^2 - \hbar\right)e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

(b) “die zeitabhängige Koordinate”

Der Koordinate-Operator

$$\hat{x} \propto \hat{a}^\dagger + \hat{a}.$$

Der Mittelwert der Koordinate in einem Eigenzustand

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle \propto \langle n|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0$$

Deswegen, in beiden Falle

$$\langle 1|x(t)|1\rangle = \langle 2|x(t)|2\rangle = 0.$$

Natürlich kann man dieses Ergebnis explizit mit der Hilfe der Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ finden.

(c) “die Linearkombinationen der Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$”

Betrachten wir den Zustand

$$|1\rangle + |2\rangle.$$

Wenn wir die Begriffe $|1\rangle$ und $|2\rangle$ statt zeitunabhängigen Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ benutzen, dann können wir die folgende zeitabhängige Wellenfunktion finden

$$\psi(x,t) = N\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right).$$

Die Normierungskonstante ist $N = 1/\sqrt{2}$.
Der Mittelwert der Koordinate ist denn

$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= N^2\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| + e^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\left[e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| + e^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{2}\left[e^{-iE_1t/\hbar}|2\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|1\rangle\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}.
\end{aligned}$$

In der zweiten Zustand

$$|1\rangle + i|2\rangle$$

gehen wir ähnlich vor:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right).$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| - ie^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)\left[e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| - ie^{iE_2t/\hbar}\langle 2|\right]\sqrt{2}\left[e^{-iE_1t/\hbar}|2\rangle + ie^{-iE_2t/\hbar}|1\rangle\right] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sin\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}.
\end{aligned}$$

2. Harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen:

Koordinatenwechsel:

$$y_1 = x_1/\gamma, y_2 = x_2, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{m}{M}}$$

Dann

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{k}{2}\left(\gamma^2 y_1^2 + y_2^2\right) + \alpha\gamma y_1 y_2.$$

Drehung des Koordinatensystems:

$$U = \frac{1}{2}k_{ij}y_i y_j \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k_1\tilde{y}_1^2 + \frac{1}{2}k_2\tilde{y}_2^2;$$

$$k_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma^2 k & \alpha\gamma \\ \alpha\gamma & l \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\gamma^2\right)k \pm \sqrt{\left(1+\gamma^2\right)^2 k^2 + 4\alpha^2\gamma^2}\right]$$

Im neuen Koordinatensystem wird der Hamiltonoperator eine Summe von zwei unabhängigen Oszillatoren. Das Energiespektrum lautet

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\sqrt{\frac{k_1}{m}}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sqrt{\frac{k_2}{m}}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right), \qquad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$$