Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik für Informatiker SS 2014

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 5: Lösungen
Besprechung 20.05.2014

---

1. Ein Teilchen im elektromagnetischen Feld:

(a) "Die Lagrange-Gleichungen"

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Die Zeitableitung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\vec{v} + e\vec{A},$$

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A},$$

deswegen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}.$$

Die Ableitung bezüglich der Koordinate

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\varphi + e\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) = -e\vec{\nabla}\varphi + e\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + e\vec{v}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right].$$

Hier benutzen wir die Formel

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{a}\times\vec{\nabla}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{\nabla}\times\vec{a}$$

Die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{\nabla}\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\vec{v}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right].$$

(b) "Die Hamilton-Funktion:"

Der kanonische (generalisierte) Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\vec{v} + e\vec{A} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right).$$

Die Hamilton-Funktion

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(m\vec{v} + e\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \left[\frac{mv^2}{2} + e\vec{v}\cdot\vec{A} - e\varphi\right] = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\varphi.$$

Um die Bewegungsgleichungen herzuleiten, benutzen wir die Formel

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{a}\times\vec{\nabla}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{\nabla}\times\vec{a}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\vec{p} = -e\vec{\nabla}\varphi + \frac{e}{m}\left(\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \frac{e}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)$$

(c) "Unterschied zwischen dem kanonischen Impuls und dem kinematischen Impuls"

Der kanonische (generalisierte) Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\vec{v} + e\vec{A} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right).$$

Der kinematische Impuls

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}$$

(d) "Die Lorentz-kraft"

Die Felder

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Die Bewegungsgleichungen bezüglich der Felder

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{\nabla}\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\vec{v}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

Die Lorentz-kraft

$$F = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

2. Elektromagnetische Wellen:

(a) i) “das elektrischen Feld in der Welle”

Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Deswegen ($\omega/c = k$):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = kA\left[\vec{e}_x \sin(\omega t - kz) - \vec{e}_y \cos(\omega t - kz)\right].$$

i) “das Magnetfeld in der Welle”

Das Magnetfeld ist

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Deswegen finden wir für das Magnetfeld ($\omega = ck$)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = kA\left[\vec{e}_x \cos(\omega t - kz) + \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)\right].$$

(b) “Die Interferenz”

Das Feld auf dem Detektor

$$E = E_1 + E_2 = E_0\left(e^{i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t\right)} + e^{i\left(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)$$

Die Intensität

$$I = \left\langle E^2 \right\rangle$$

$$E^2 = E_0^2\left(2 + 2\mathrm{Re}\, e^{i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t\right)} e^{i\left(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) = 2E_0^2\left\{1 + \cos\left[\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot\vec{r}\right]\right\}$$

deswegen

$$I = 4E_0^2 \cos^2\frac{\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot\vec{r}}{2}$$

Wenn die Distanz s zwischen Blende und Schirm viel grösser als alle anderen Längen ist, dann

$$\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot\vec{r} \approx -\frac{ayk_0}{s}, \qquad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$