Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 0
Besprechung: 19.04.2016

---

1. Geladene Teilchen: Kepler-Problem (15 Bonuspunkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen (Masse m_1, m_2), die aufgrund des Coulombschen Gesetzes miteinander wechselwirken. Jedes Teilchen übt auf das andere eine Kraft $f(r)$ aus, die nur vom Betrag des Abstandes $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$ abhängt. Das Coulombsche Potential ist ähnlich dem Gravitationspotential umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Teilchen: $U(r) = q_1 q_2 / r$. Hier bezeichnen q_1 und q_2 die elektrischen Ladungen der Teilchen. Für den Fall $q_1 q_2 < 0$ ist die Coulombsche Kraft anziehend. Bestimmen Sie den minimalen ($r_{\min}$) und maximalen ($r_{\max}$) Abstand zwischen den Teilchen wenn die Bewegung beschränkt ist.

2. Mathematische Grundlagen: Nabla-Kalkül (5+6+4=15 Bonuspunkte)

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir die folgenden Symbole:

$$\vec{\nabla} f \equiv \mathrm{grad} f, \quad \vec{\nabla}\vec{v} \equiv \mathrm{div}\vec{v}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \mathrm{rot}\vec{v},$$

wobei $f(\vec{r}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – Skalarfunktion und $\vec{v}(\vec{r}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – Vektorfunktion sind.

a. Berechnen Sie (mit $r = |\vec{r}|$) (1+1+1+2=5 Bonuspunkte)

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r}, \quad \vec{\nabla}\,\frac{1}{r^3}.$$

b. Beweisen Sie die folgende Produktregeln: (2+2+2=6 Bonuspunkte)

- $\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \vec{v}(\vec{\nabla} f) + f\vec{\nabla}\vec{v}$
- $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = -\vec{v} \times (\vec{\nabla} f) + f\vec{\nabla} \times \vec{v}$

Berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r})\, \frac{\vec{r}}{r} \right].$$

c. Beweisen Sie die folgende Kettenregeln: (2+2=4 Bonuspunkte)

- $\vec{\nabla}\vec{P}(f(\vec{r})) = \dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\vec{\nabla} f(\vec{r})$
- $\vec{\nabla} \times \vec{P}(f(\vec{r})) = -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \times (\vec{\nabla} f(\vec{r}))$

mit $\dot{\vec{P}}(f) = \partial\vec{P}/\partial f$