Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin

PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 3. Abgabe: 06.05.2016

Besprechung: 10.05.2016

---

1. Pendel mit zeitabhängiger Aufhängung (4+4+6=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte mathematische Pendel der Masse m in der x-z Ebene mit konstanter Fadenlänge l und zeitabhängiger Position der Aufhängung $x_s(t)$. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse.

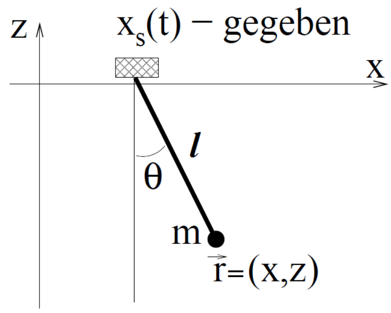

Abb. 1: Pendel mit bewegter Aufhängung.

(a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingung für die Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$ des Pendels. Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art erst in kartesischen Koordinaten und dann in Zylinder-Koordinaten auf.

(b) Eliminieren Sie die Zwangskraft und leiten Sie die Bewegungsgleichung für den kleinen Winkel $\theta \ll 1$ her. Finden Sie dann die Bahnkurve für den Fall, dass $x_s(t) = x_0 \cos(\omega t)$.

(c) Finden Sie nun die Zwangskraft $\vec{Z}$, die auf das Pendel wirkt (vernachlässigen Sie Terme höherer als zweiter Ordnung in θ sowie in Ableitungen von θ).

2. Zwei Pendel verbunden durch eine Feder (3+5+2+8=18 Punkte)

Ein Doppelpendel besteht aus zwei mathematischen Pendeln, d.h. Massepunkten m_1 und m_2, die am Ende je einer masselosen Stange der Länge l angebracht sind (s. Abb. 2). Der Abstand zwischen den Aufhängepunkten sei d. Die Massepunkte seien durch eine Feder (mit Federkonstante k und vernachlässigbarem Gewicht) miteinander verbunden, die im spannunglosen Zustand die Länge d besitzen soll.

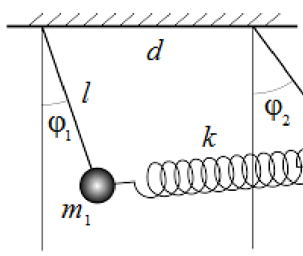

Abb. 2: Doppelpendel mit Feder.

(a) Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Winkeln φ_1 und φ_2. Berechnen Sie den Abstand der Massen in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 und geben Sie die potentielle Energie der Feder an.

(b) Geben Sie die Lagrangefunktion für das gesamte System an. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.

(c) Geben Sie die vereinfachte Lagrangefunktion für kleine Winkeln φ_1, φ_2 und die zugehörigen Bewegungsgleichungen an.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für harmonischen Schwingungen (d.h. für $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$)?

3. Gleitender Massenpunkt auf Kegel-Innenfläche (3+5+3+7=18 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf der Innenfläche eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel α (s. Abb. 3).

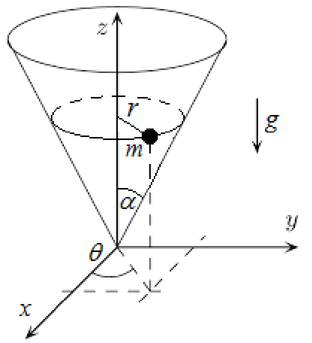

Abb. 3: Teilchen auf Kegel-Innenfläche.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Teilchens in Koordinaten r und θ auf.

(b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen des Teilchens ab. Welche Bewegungsgleichung kann man sofort integrieren? Welcher Erhaltungssatz folgt daraus?

(c) Zeigen Sie, dass sich das Teilchen auf Kreisbahnen bewegen kann. Wie groß ist dann die Geschwindigkeit des Teilchens?

(d) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Teilchens auf diesen Kreisbahnen stabil verläuft, d.h. eine kleine Störung zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führt. Bestimmen Sie die Frequenz dieser Schwingungen.