Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 5. Abgabe: 20.05.2016
Besprechung: 24.05.2016

---

1. Variationsrechnung mit Nebenbedingung (3+2+4+8+5+8=30 Punkte)

Ein Seil der Länge L werde an zwei Punkten $(-d, 0)$ und $(d, 0)$ (d.h. in gleicher Höhe und mit Abstand $2d$, s. Abb. 1) im Schwerefeld aufgehängt. Für die Länge des Seiles gelte $L > 2d$. Nehmen Sie eine konstante Massendichte ρ an.
Gesucht wird die Kurve, die die Gleichgewichtslage des Seils beschreibt. Das Seil stellt sich so ein, dass seine potentielle Energie minimal wird.

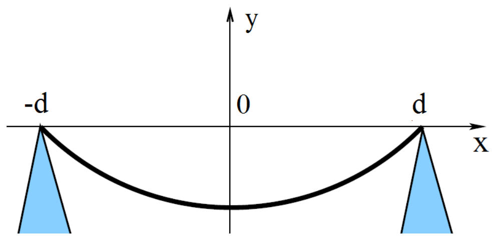

Abbildung 1: Das hängende Seil.

(a) Wir beschreiben die Lage des Seils durch eine Funktion $y(x)$. Geben Sie die potentielle Energie des Seils und seine Länge als Funktional von $y(x)$ an und formulieren Sie das Variationsproblem mit Nebenbedingung.

(b) Benutzen Sie die Methode der Lagrangemultiplikatoren und bilden Sie das Funktional

$$\mathcal{K}[y(x)] = \int_{-d}^{d} dx\, K(y(x), y'(x)) \ ,$$

für das ein Minimum gesucht werden muss.

(c) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Extremum dieses Funktionals an.

(d) Verwenden Sie die Konstanz der Größe

$$I = K - y' \frac{\partial K}{\partial y'}.$$

Aus welcher Eigenschaft des Funktionals $\mathcal{K}$ folgt $I = \text{const}$? Sie erhalten damit eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form $y' = F(y)$, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Wie viele Konstanten enthält die gefundene Lösung $y(x)$? Durch welche Bedingungen werden sie festgelegt?

(e) Betrachten Sie die Kräfte die auf ein kleines Teil des Seils wirken. Was muss für die vektorielle Summe dieser Kräfte gelten? Leiten Sie daraus noch einmal die obige Differenzialgleichung $y' = F(y)$ her.

(f) Betrachten Sie nun die Situation, dass ein Massenpunkt mit Masse M_0 stationär an das Seil befestigt wird. Die Länge des Seilstückes vom Punkt $(-d, 0)$ zur Position der Masse sei l_0. Finden Sie die Kurve $y(x)$, die die Gleichgewichtslage des Seils beschreibt.

2. Bewegungsgleichung mit zeitabhängigen Masse (10 Punkte)

Welche Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m(t)}{2}\dot{x}^2 - \frac{m(t)}{2}\omega_0^2 x^2$$

mit der zeitabhängigen Masse $m(t) = m_0 e^{2\lambda t}$? Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Diskutieren Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Fälle: (a) $|\lambda| < \omega_0$, (b) $|\lambda| = \omega_0$ und (c) $|\lambda| > \omega_0$.