Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Blatt 8. Abgabe: 10.06.2016
Besprechung: 14.06.2016

---

1. Das ebene Doppel-Pendel (4+6+4=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte ebene Doppel-Pendel. Beide Massenpunkte bewegen sich nur in der x-z Ebene. Die Massen der Massenpunkte sind m_1 und m_2 und die Längen der masselosen Stäbe sind l_1 und l_2. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse.

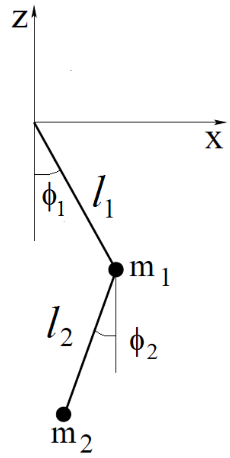

Abbildung 1.

(a) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten die Winkel ϕ_1 und ϕ_2. Geben Sie die Matrizen m_{ij} und V_{ij} des allgemeinen Verfahrens für kleine Schwingungen an. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ_1 und ϕ_2 her.

(b) Stellen Sie die Eigenwertgleichung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k an.

(c) Betrachten Sie nun das Pendel mit $l_1 = l_2 = l$. Geben Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ an und beschreiben Sie die Bewegung des Pendels in beiden Fällen.

2. Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt. (3+4+5=12 Punkte)

Ein ebenes Pendel mit der Masse m und Fadenlänge l, dessen Aufhängepunkt (der die Masse M besitzt) sich entlang einer horizontalen Geraden frei bewegen kann, ist rechts abgebildet. Gesucht sei die Frequenz der Schwingungen des Systems.

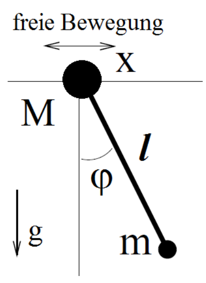

Abbildung 2.

(a) Benutzen Sie φ und x (s. Abb. 2) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion, die Energie und die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen) für dieses System an.

(b) Zeigen Sie, dass die horizontale Komponente des Schwerpunktimpulses (P_x) eine Erhaltungsgröße ist. Setzen Sie $P_x = 0$ und eliminieren Sie die zyklische Koordinate in der Bewegungsgleichung und Energie.

(c) Betrachten Sie zunächst den Fall kleiner Schwingungen. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k an und bestimmen Sie die Frequenzen der Schwingungen. Was ergibt sich im Limes $M \to \infty$?

5 Bonuspunkte: Betrachten Sie nun den Fall einer beliebigen Schwingungsamplitude $\varphi_{\max}$. Bestimmen Sie aus der Energieerhaltung die Schwingungsdauer des Pendels.

3. Asymmetrisches dreiatomiges Molekül (3+5+6=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 3 skizzierte Model für ein dreiatomiges lineares Molekül. Die drei Atome der Masse $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = M$ sind über zwei Federn der Federkonstanten k und $2k$ miteinander verbunden und können sich nur entlang der Molekülachse bewegen. Der Gleichgewichtsabstand zwischen benachbarten Atomen sei l. Die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen werden mit x_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet.

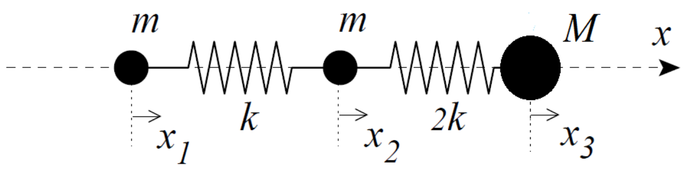

Abbildung 3.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Moleküles und die zugehörigen Matrizen m_{ij} und V_{ij} an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenvektoren. Was ergibt sich im Limes $M \to \infty$?

(c) Betrachten Sie nun den Fall $M = 2m$. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k und die allgemeine reelle Lösung an.

5 Bonuspunkte: Bestimmen Sie mithilfe der obigen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x_1(t = 0) = x_2(t = 0) = 0,\ x_3(t = 0) = l$ und $\dot{\vec{x}}(t = 0) = 0$.