Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 0
Besprechung: 19.04.2016

---

1. Geladene Teilchen: Kepler-Problem (15 Bonuspunkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen (Masse m_1, m_2), die aufgrund des Coulombschen Gesetzes miteinander wechselwirken. Das Coulombsche Potential ist ähnlich dem Gravitationspotential umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Teilchen: $U(r) = q_1 q_2/r$. Hier bezeichnen q_1 und q_2 die elektrischen Ladungen der Teilchen. Für den Fall $q_1 q_2 < 0$ ist die Coulombsche Kraft anziehend. Bestimmen Sie den minimalen ($r_{\rm min}$) und maximalen ($r_{\rm max}$) Abstand zwischen den Teilchen wenn die Bewegung beschränkt ist.

Lösung:

Jedes Teilchen übt auf das andere eine Kraft $f(r)$ aus, die nur vom Betrag des Abstandes $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$ abhängt. Dann gelten folgende Newtonsche Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{2}$$

Der Gesamtimpuls ist eine erhaltene Größe (wir setzen voraus, dass es keine äußeren Kräfte gibt):

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0. \tag{3}$$

Die Bewegung des Schwerpunktes ist dann trivial. Die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung lautet

$$\ddot{\vec{r}} \equiv \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{1}{\mu}f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{4}$$

wobei

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{5}$$

($\Uparrow$ 2 Punkte)

Die Bewegungsgleichung (4) ähnelt einer physikalischen Situation, in der sich das Kraftzentrum unbeweglich im Ursprung befindet und ein Teilchen mit der Masse μ sich unter dem Einfluss dessen Kraft bewegt. Diese Bewegung wird von zwei Erhaltungsgrößen eingeschränkt: der Energie und dem Drehimpuls.

Der Drehimpuls der Relativbewegung ist durch

$$\vec{L}_{\rm rel} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{6}$$

gegeben. Wir betrachten nun die Zeitableitung von $\vec{L}_{\rm rel}$:

$$\dot{\vec{L}}_{\rm rel} = \mu \left[\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right]. \tag{7}$$

Der erste Teil ist trivial: $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$. Im zweiten Teil benutzen wir Gl. (4):

$$\mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -f(r) \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r}. \tag{8}$$

Man sieht, dass für Zentralkraftfelder mit festem Ursprung [d.h. von der Form Gl. (4)] der Drehimpuls stets erhalten ist.

($\Uparrow$ 3 Punkte)

Da $\vec{L}_{\rm rel}$ senkrecht auf $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ steht, verläuft die Relativbewegung in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}_{\rm rel}$. Wählt man die z-Richtung in Richtung von $\vec{L}_{\rm rel}$, so liegt $\vec{r}$, ebenso wie $\dot{\vec{r}}$, immer in der xy-Ebene. Führt man nun in der xy-Ebene Polarkoordinaten ein, dann erhält man

$$\vec{L}_{\rm rel} = (0, 0, l_z), \quad l_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2 \dot{\varphi}. \tag{9}$$

($\Uparrow$ 2 Punkte)

Für die kinetische Energie der Relativbewegung erhält man $T_{\rm rel} = \mu \dot{\vec{r}}^2/2$. Zusammen mit der potentiellen Energie ergibt sich

$$E_{\rm rel} = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{10}$$

Die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ schreibt man in Polarkoordinaten als

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \tag{11}$$

Für die Energie der Relativbewegung erhält man folglich [wir benutzen Gl. (9)]

$$E_{\rm rel} = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{12}$$

Da der Drehimpuls l_z eine erhaltene Größe ist, ist die Energie $E_{\rm rel}$ unabhängig von φ. Der Ausdruck für $E_{\rm rel}$ hat genau dieselbe Form wie derjenige für die Energie eines eindimensionalen Systems mit dem effektiven Potential

$$U_{\rm eff} = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{13}$$

($\Uparrow$ 5 Punkte)

Betrachten wir nun die Eigenschaften des Potentials $U_{\rm eff}$ für den Fall $q_1 q_2 < 0$, wenn die Coulombsche Kraft anziehend ist. Das Potential $U_{\rm eff}(r)$ hat dann die in Abb. 1 dargestellte Form. Wenn $E_{\rm rel} < 0$, in Abb. 1 als gestrichelte Linie dargestellt, dann ist die Bewegung beschränkt. Für r gilt

$$r_{\rm min} \leq r \leq r_{\rm max}, \tag{14}$$

wobei $r_{\rm min}$ und $r_{\rm max}$ durch

$$E_{\rm rel} = U_{\rm eff}(r) \tag{15}$$

gegeben sind. Man erhält

$$r_{\text{min}} = \frac{a}{1+\epsilon}, \qquad r_{\text{max}} = \frac{a}{1-\epsilon}, \tag{16}$$

wobei

$$a = \frac{l_z^2}{\mu|q_1 q_2|}, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{\text{rel}} l_z^2}{\mu q_1^2 q_2^2}}. \tag{17}$$

Für $\epsilon = 1$ (d.h. $E_{\text{rel}} = 0$) gilt

$$r_{\text{max}} = \infty.$$

($\Uparrow$ 3 Punkte)

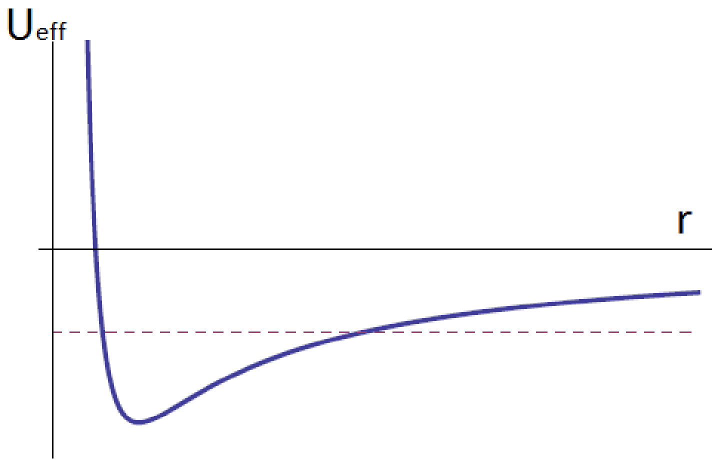

Abbildung 1: Effektives Potential $U_{\text{eff}}(r)$ einer attraktiven Wechselwirkung $q_1 q_2 < 0$.

2. Mathematische Grundlagen: Nabla-Kalkül (5+6+4=15 Bonuspunkte)

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir die folgenden Symbole:

$$\vec{\nabla} f \equiv \text{grad} f, \quad \vec{\nabla}\vec{v} \equiv \text{div}\vec{v}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \text{rot}\vec{v},$$

wobei $f(\vec{r}):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – Skalarfunktion und $\vec{v}(\vec{r}):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – Vektorfunktion sind.

a. Berechnen Sie (mit $r = |\vec{r}|$) (1+1+1+2=5 Bonuspunkte)

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r}, \quad \vec{\nabla}\, \frac{1}{r^3}.$$

Lösung:

- In kartesischen Koordinaten $x_i = (x, y, z)$ ist der Nabla-Operator definiert als:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i = \vec{e}_i \partial_i \tag{18}$$

wobei wir die partielle Ableitung definiert haben als:

$$\partial_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{19}$$

und wir in Zukunft die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Hierbei wird über doppelt auftretende Indizes automatisch von 1-3 summiert.

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{20}$$

Wir sehen also, dass gilt:

$$\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}. \tag{21}$$

Da wir im Folgenden die Indexschreibweise üben wollen, machen wir diese Aufgabe nochmal etwas anders:

$$\vec{\nabla} r = \vec{e}_i \partial_i r \overset{(21)}{=} \vec{e}_i \frac{x_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \tag{22}$$

wobei wir genutzt haben, dass gilt:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_i \vec{e}_i \tag{23}$$

•

$$\vec{\nabla}\vec{r} = \vec{e}_i \partial_i x_j \vec{e}_j = \vec{e}_i \delta_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i}_{=1} = \sum_{i=1}^{3} 1 = 3 \tag{24}$$

Hier haben wir am Ende die Summe doch noch mal explizit hingeschrieben, sodass wir sehen, dass wir noch 3 mal über die 1 summieren müssen. Des weiteren gilt natürlich:

$$\partial_i x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}. \tag{25}$$

Da gilt:

$$\begin{aligned} &\partial_x x = \partial_y y = \partial_z z = 1 \\ &\partial_x y = \partial_x z = \partial_y x = \partial_y z = \partial_z x = \partial_z y = 0. \end{aligned}$$

•

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = 0, \tag{26}$$

oder auch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j x_k \overset{(25)}{=} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \vec{e}_i \epsilon_{ijj} \overset{(28)}{=} 0, \tag{27}$$

wobei

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123 = 312 = 231 = \text{ gerade Permutation von 123} \\ -1 & \text{für } ijk = 321 = 132 = 213 = \text{ ungerade Permutation von 123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{28}$$

das Levi-Civita-Symbol (ϵ-Tensor) ist.
Dieser Tensor ist antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier beliebiger Indizes:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}. \tag{29}$$

Mit dem ϵ-Tensor können wir das Kreuzprodukt schreiben als:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{e}_i \cdot \epsilon_{ijk} a_j b_k, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \epsilon_{ijk} a_j b_k. \end{aligned} \tag{30}$$

Zusätzlich geben wir noch eine wichtige Eigenschaft an:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \tag{31}$$

- $$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^3(x,y,z)}\right) = \vec{e}_i \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \overset{(21)}{=} \vec{e}_i\left(-\frac{3}{r^4}\right)\frac{x_i}{r} = -3\frac{\vec{r}}{r^5}, \tag{32}$$

  wobei wir die Kettenregel verwendet haben, da $r = r(\vec{r}) = r(x,y,z)$ eine Funktion der Variablen ist, nach der abgeleitet wird.

b. Beweisen Sie die folgende Produktregeln: (2+2+2=6 Bonuspunkte)

- $\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \vec{v}(\vec{\nabla}f) + f\vec{\nabla}\vec{v}$
- $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = -\vec{v} \times (\vec{\nabla}f) + f\vec{\nabla} \times \vec{v}$

Berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r})\ \frac{\vec{r}}{r}\right].$$

Lösung:
Es gilt, dass wenn eine Klammer um einen Ausdruck mit Ableitung steht, diese Ableitung nicht mehr auf das wirkt, was hinter der Klammer steht, sondern nur auf die Ausdrücke in der Klammer:

$$(\vec{\nabla}f)\vec{v} \equiv \vec{v}\vec{\nabla}f, \quad (\vec{\nabla}f) \times \vec{v} \equiv -\vec{v} \times \vec{\nabla}f.$$

- $$\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \partial_i(f\vec{v})_i = \partial_i(fv_i) = (\partial_i f)v_i + f(\partial_i v_i) = (\vec{\nabla}f)\vec{v} + f(\vec{\nabla}\vec{v}). \tag{33}$$

-
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f\vec{v})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f v_k) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} [(\partial_j f) v_k + f(\partial_j v_k)] \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j f) v_k + f \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j v_k) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\ &= -\vec{v} \times \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \end{aligned} \tag{34}$$

-
$$\vec{\nabla} \times \Bigg[f(\vec{r}) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\hat{=}\vec{v}} \Bigg] \overset{(34)}{=} (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \times \frac{\vec{r}}{r} + f(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} \right] \tag{35}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r} \times [\vec{\nabla} f(\vec{r})] + f(\vec{r}) \left[\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} \right]. \tag{36}$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \frac{x_k}{r} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial_j x_k}{r} + x_k \partial_j \frac{1}{r} \right] = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left[\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_k x_j}{r^2} \right] \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijj} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \vec{e}_i \underbrace{\epsilon_{ijk} x_j x_k}_{\substack{=\text{antisym. unter} \\ \text{Vertauschung von } j \text{ und } k}} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Der erste Term verschwindet, weil $\epsilon_{ijj} = 0$. Der zweite Term verschwindet, weil die Summe über (j,k) für alle i Null ergibt. Dies wollen wir noch kurz allgemein beweisen. Wir betrachten die Doppelsumme:

$$\sum_{j,k} A_{jk}$$

mit einem antisymmetrischen Term:

$$A_{jk} = -A_{kj} \qquad \to \qquad A_{jj} = -A_{jj} = 0$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} A_{jk} &= \sum_{j<k} A_{jk} + \sum_{j=k} A_{jk} + \sum_{k<j} A_{jk} = \sum_{j<k} A_{jk} + \sum_{j} A_{jj} + \sum_{k<j} A_{jk} \\ &= \sum_{j<k} A_{jk} - \sum_{k<j} A_{kj} \end{aligned}$$

Im zweiten Term benennen wir nun die Indizes einfach um $j \to k, k \to j$ und bekommen:

$$\sum_{j,k} A_{jk} = \sum_{j<k} A_{jk} - \sum_{j<k} A_{jk} = 0. \tag{38}$$

Kommen wir zurück zu Gleichung (36). Mit Hilfe von (37) folgt nun einfach:

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r} \times [\vec{\nabla} f(\vec{r})]. \tag{39}$$

c. Beweisen Sie die folgende Kettenregeln: (2+2=4 Bonuspunkte)

- $\vec{\nabla}\vec{P}(f(\vec{r})) = \dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\vec{\nabla}f(\vec{r})$
- $\vec{\nabla}\times\vec{P}(f(\vec{r})) = -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\times(\vec{\nabla}f(\vec{r}))$

mit $\dot{\vec{P}}(f) = \partial\vec{P}/\partial f$

Lösung

-

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i\partial_i\vec{P}(f(\vec{r})) = \vec{e}_i\frac{\partial\vec{P}(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} = \vec{e}_i\dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\partial_i f(\vec{r})\\ &= \dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\cdot(\vec{\nabla}f(\vec{r})).\end{aligned} \tag{40}$$

-

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j P_k(f(\vec{r})) = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial P_k(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_j} = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\dot{P}_k(f(\vec{r}))\partial_j f(\vec{r})\\ &= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}(\vec{\nabla}f(\vec{r}))_j\dot{P}_k(f(\vec{r})) = (\vec{\nabla}f(\vec{r}))\times\dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\\ &= -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\times(\vec{\nabla}f(\vec{r})).\end{aligned} \tag{41}$$