Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 1
Besprechung: 26.04.2016

---

1. Bahnkurven geladener Teilchen (12+2+6=20 Punkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen (Masse m_1, m_2), die aufgrund des Coulombschen Gesetzes miteinander wechselwirken. Das Coulombsche Potential ist umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Teilchen: $U(r) = q_1 q_2 / r$. Hier bezeichnen q_1 und q_2 die elektrischen Ladungen der Teilchen. Vorausgesetzt sei, dass keine außere Kraft auf die Teilchen wirkt.

(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve der Teilchen für den Fall $q_1 q_2 < 0$. (12 Punkte)

(b) Nehmen Sie an, dass die Teilchen anfänglich ruhen und sich in einem Abstand R voneinander befinden. Berechnen Sie nun die Zeit bis die Teilchen kollidieren. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve der Teilchen für den Fall $q_1 q_2 > 0$, wenn die Coulombsche Kraft abstoßend ist. (6 Punkte)

Lösung:

Die Relativbewegung der Teilchen wird von zwei Erhaltungsgrößen eingeschränkt: der Energie und dem Drehimpuls. Für die Energie der Relativbewegung erhält man [s. Musterlösung für Aufgabe 1 von Blatt 0]:

$$E_{\mathrm{rel}} = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}, \tag{1}$$

wobei $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{2}$$

Da der Drehimpuls

$$\vec{L}_{\mathrm{rel}} = (0, 0, l_z), \quad l_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2 \dot{\varphi} \tag{3}$$

eine erhaltene Größe ist, ist die Energie E_{rel} unabhängig vom Polarwinkel φ in der xy-Ebene. Der Ausdruck für E_{rel} hat genau dieselbe Form wie derjenige für die Energie eines eindimensionalen Systems mit dem effektiven Potential

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve der Teilchen für den Fall $q_1 q_2 < 0$. (12 Punkte)

Für den Fall $q_1 q_2 < 0$ ist die Coulombsche Kraft anziehend. Das Potential $U_{\text{eff}}(r)$ hat dann die in Abb. 1 dargestellte Form. Wenn $E_{\text{rel}} < 0$, in Abb. 1 als gestrichelte Linie dargestellt, dann ist die Bewegung beschränkt. Für r gilt dann [s. Blatt 0]

$$\frac{a}{1+\epsilon} \leq r \leq \frac{a}{1-\epsilon}, \tag{5}$$

wobei

$$a = -\frac{l_z^2}{\mu q_1 q_2}, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{\text{rel}} l_z^2}{\mu q_1^2 q_2^2}}. \tag{6}$$

Beachten Sie, dass $a \geq 0$ für eine attraktive ($q_1 q_2 < 0$) Wechselwirkung. Wenn $E_{\text{rel}} > 0$ (d.h. $\epsilon > 1$) gilt, dann ist die Bewegung unbeschränkt, $r \geq a/(1+\epsilon)$.

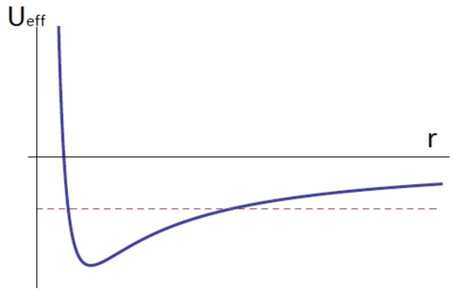

Abbildung 1: Effektives Potential $U_{\text{eff}}(r)$ einer attraktiven ($q_1 q_2 < 0$) Wechselwirkung.

Um die Bahnkurve nun explizit zu bestimmen, benutzen wir Gl. (1):

$$\dot{\vec{r}} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)\right]}. \tag{7}$$

Wegen Gl. (3) erhält man

$$\dot{\vec{r}} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{l_z}{\mu r^2}. \tag{8}$$

Somit gilt

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2\mu}}{l_z}\, r^2 \sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)} \tag{9}$$

und es ergibt sich:

$$\varphi = \pm\frac{l_z}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)}} + \text{const}. \tag{10}$$

Für das Coulombsche Potential kann man das Integral nach Standardregeln berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{l_z}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)}} &\overbrace{=}^{r=1/u} - \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E_{\text{rel}}/l_z^2 - u^2 - (2\mu q_1 q_2/l_z^2)u}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} = -2\arctan\frac{\sqrt{u_1 - u}}{\sqrt{u - u_2}}, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei

$$u_1 = \frac{1}{a}\,(1+\epsilon)\,, \qquad u_2 = \frac{1}{a}\,(1-\epsilon) \tag{12}$$

mit a und ϵ aus Gl. (6). Aus Gl. (10) erhält man

$$\varphi - \varphi_0 \;=\; \pm\int_{1/r}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \pm 2\arctan\frac{\sqrt{u_1 r-1}}{\sqrt{1-u_2 r}}, \tag{13}$$

wobei φ_0 der Polarwinkel ist, der $r = 1/u_1 = a/(1+\epsilon) \equiv r_{\min}$ entspricht (im folgenden setzen wir $\varphi_0 = 0$).
Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{u_1 r - 1}{1-u_2 r} &= \left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \\ r &= \frac{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}{u_2\tan^2\frac{\varphi}{2}+u_1} = \frac{1}{u_2\sin^2\frac{\varphi}{2}+u_1\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{1+\epsilon\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist

$$\frac{a}{r} = 1+\epsilon\cos\varphi. \tag{14}$$

Man erhält so die Polargleichung für einen Kegelschnitt mit einem Brennpunkt im Zentrum und zwar

(i) für $\epsilon < 1$ (d.h. $E_{\rm rel} < 0$) eine Ellipse mit dem Spezialfall eines Kreises für den minimalen Wert $\epsilon = 0$;
(ii) für $\epsilon = 1$ (d.h. $E_{\rm rel} = 0$) eine Parabel;
(iii) für $\epsilon > 1$ (d.h. $E_{\rm rel} > 0$) eine Hyperbel.

Um diese Ergebnisse explizit zu bekommen, betrachten wir nun Gl. (14) in kartesischen Koordinaten. Mit den Beziehungen

$$x = r\cos\varphi, \qquad r^2 = x^2+y^2 \tag{15}$$

folgt

$$(1-\epsilon^2)x^2 + 2a\epsilon x + y^2 = a^2. \tag{16}$$

Für $\epsilon = 1$ (d.h. $E_{\rm rel} = 0$) ist die Bahnkurve eine Parabel:

$$x = -\frac{y^2}{2a\epsilon} + \frac{a}{2\epsilon}. \tag{17}$$

Für $\epsilon \neq 1$ gilt

$$(1-\epsilon^2)(x-x_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{1-\epsilon^2}, \tag{18}$$

wobei

$$x_0 = \frac{a\epsilon}{1-\epsilon^2}. \tag{19}$$

Nun kann man die Gleichung in die kanonische Form überführen

$$\frac{(x-x_0)^2}{X^2} + \eta\frac{y^2}{Y^2} = 1 \tag{20}$$

mit

$$X^2 = \frac{a^2}{(1-\epsilon^2)^2}, \quad Y^2 = \frac{a^2}{|1-\epsilon^2|}, \quad \eta = \mathrm{sign}(1-\epsilon^2). \tag{21}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bahnkurve für $\epsilon < 1$ (d.h. $\eta = 1$) eine Ellipse ist:

$$\frac{(x-x_0)^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1, \qquad x_0 > 0. \tag{22}$$

Anderenfalls, für $\epsilon > 1$ (d.h. $\eta = -1$) ist die Bahnkurve eine Hyperbel:

$$\frac{(x-x_0)^2}{X^2} - \frac{y^2}{Y^2} = 1, \qquad x_0 < 0. \tag{23}$$

(b) Nehmen Sie an, dass die Teilchen anfänglich ruhen und sich in einem Abstand R voneinander befinden. Berechnen Sie nun die Zeit bis die Teilchen kollidieren. (2 Punkte)

Für ruhende Teilchen verschwindet der Drehimpuls, $l_z = 0$, und somit $U_{\text{eff}}(r) = -|q_1 q_2|/r$. Am Anfang ($t = 0$) ist die kinetische Energie null und somit

$$E_{\text{rel}} = \frac{q_1 q_2}{R} < 0. \tag{24}$$

Wir benutzen Gl. (7):

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)\right]}, \quad r(t=0) = R. \tag{25}$$

Man erhält:

$$t = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)\right]}} = \sqrt{\frac{\mu R}{2|q_1 q_2|}} \int_0^R \frac{dr\sqrt{r}}{\sqrt{R-r}} = \pi\sqrt{\frac{\mu R^3}{8|q_1 q_2|}}. \tag{26}$$

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve der Teilchen für den Fall $q_1 q_2 > 0$, wenn die Coulombsche Kraft abstoßend ist. (6 Punkte)

Im Fall des abstoßendes Potential sind nur positive Energien möglich (Abb. 1).

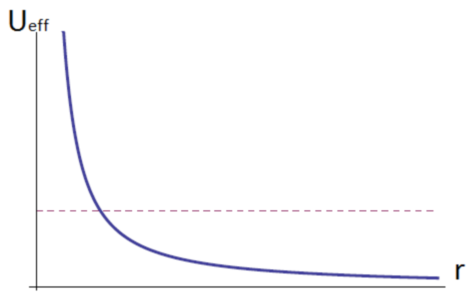

Abbildung 2: Effektives Potential $U_{\text{eff}}(r)$ einer repulsiven ($q_1 q_2 > 0$) Wechselwirkung.

Nun ist jedoch $a < 0$ in Gl. (6) und es gilt

$$|a|/r = -1 + \epsilon\cos\varphi. \tag{27}$$

Die Bahnkurve ist eine Hyperbel, Gl. (23), mit $x_0 > 0$. Das bedeutet, dass die Teilchen um sich drehen, bevor sie den Ursprung (Schwerpunkt, $x = 0$) erreichen.