Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Bonusblatt 14
Musterlösung

---

1. Kanonische Transformation (2+4+4=10 Bonuspunkte)

(a) Betrachten Sie die folgende kanonische Transformation: $\vec{P} = \vec{p}$, $\vec{Q} = \vec{q} - \vec{p}t/m$. Finden Sie die Hamiltonfunktion H' in den transformierten Koordinaten für ein freies Teilchen.

Lösung:

Hamiltonfunktion $H(q,p)$ eines freien Teilchen:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}.$$

Kanonische Transformation:

$$P_i = P_i(q,p,t) = p_i, \quad Q_i = Q_i(q,p,t) = q_i - \frac{p_i t}{m} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} = 0, \\ \dot{Q}_i &= \dot{q}_i - \frac{\dot{p}_i t}{m} - \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} - \frac{p_i}{m} = 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass P und Q die Anfangsbedingungen für die freie Bewegung sind. Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(Q,P)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial Q_i} \quad \Rightarrow \\ &\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial H'(Q,P)}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \\ &H'(Q,P) = \text{const}(Q,P). \end{aligned}$$

Da eine Konstante in Hamiltonfunktion keine Rolle spielt, kann man

$$H'(Q,P) = 0$$

setzen.

(b) Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist die Transformation $Q = q^\alpha p^\beta$, $P = q^\gamma p^\delta$ in einem System mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$) kanonisch? Bestimmen Sie für diesen Fall die Erzeugende $F(q,Q)$.

Lösung:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Transformation kanonisch zu sein sind durch die Poissonklammern gegeben:

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_i\}_{q,p} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1 \ldots f.$$

Für ein System mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$) reduziert sich diese Bedingung auf

$$\{Q, P\}_{q,p} = 1.$$

Wir berechnen nun $\{Q, P\}_{q,p}$ für die angegebene Transformation $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$:

$$\begin{aligned}
\{Q, P\}_{q,p} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= \frac{\partial(q^\alpha p^\beta)}{\partial q}\frac{\partial(q^\gamma p^\delta)}{\partial p} - \frac{\partial(q^\alpha p^\beta)}{\partial p}\frac{\partial(q^\gamma p^\delta)}{\partial q} \\
&= \alpha(q^{\alpha-1}p^\beta)\delta(q^\gamma p^{\delta-1}) - \beta(q^\alpha p^{\beta-1})\gamma(q^{\gamma-1}p^\delta) \\
&= q^{\alpha-1+\gamma}p^{\beta+\delta-1}(\alpha\delta - \beta\gamma).
\end{aligned}$$

Die Poissonklammer $\{Q, P\}$ ist nur dann unabhängig von q und p, wenn

$$\alpha - 1 + \gamma = 0 \quad \text{und} \quad \beta + \delta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 - \alpha \quad \text{und} \quad \delta = 1 - \beta.$$

Wir erhalten

$$\{Q, P\}_{q,p} = \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha(1 - \beta) - \beta(1 - \alpha) = \alpha - \beta.$$

Es folgt daraus, dass die Transformation nur für

$$\alpha - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \delta = 2 - \alpha$$

kanonisch ist. Die kanonische Transformation ist also durch einen einzigen Parameter α parametriert:

$$Q = q^\alpha p^{\alpha-1}, \quad P = q^{1-\alpha}p^{2-\alpha}.$$

Um die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ zu finden, drücken wir p und P durch q und Q aus,

$$\begin{aligned}
p &= Q^{1/(\alpha-1)}q^{-\alpha/(\alpha-1)}, \\
P &= q^{1-\alpha}p^{2-\alpha} = q^{1-\alpha}[Q^{1/(\alpha-1)}q^{-\alpha/(\alpha-1)}]^{2-\alpha} = q^{-1/(\alpha-1)}Q^{(2-\alpha)/(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

und benutzen

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}.$$

Dies ergibt:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = Q^{1/(\alpha-1)}q^{-\alpha/(\alpha-1)} \quad \Rightarrow \quad F(q, Q) = (1 - \alpha)Q^{1/(\alpha-1)}q^{-1/(\alpha-1)} + f_1(Q),$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -q^{-1/(\alpha-1)}Q^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \quad \Rightarrow \quad F(q, Q) = (1 - \alpha)q^{-1/(\alpha-1)}Q^{1/(\alpha-1)} + f_2(q).$$

Es folgt dass $f_1(Q) = f_2(q) = 0$ und das Ergebnis für die erzeugende Funktion ist:

$$F(q, Q) = (1 - \alpha)q^{-1/(\alpha-1)}Q^{1/(\alpha-1)}.$$

(c) Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω, auf den eine äußere Kraft $K(t)$ einwirkt. Gegeben ist die erzeugende Funktion

$$F(q,Q,t) = \frac{m\omega}{2}\left[q - \frac{K(t)}{m\omega^2}\right]^2 \cot Q.$$

Schreiben Sie die kanonische Transformation und die Bewegungsgleichungen in den transformierten Koordinaten auf.

Lösung:

Die Hamiltonfunktion $H(q,p,t)$ des Oszillator mit externer Kraft $K(t)$ ist durch

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 - K(t)q$$

gegeben.

Wir folgen dem Verfahren aus der Vorlesung und finden zunächst p und P:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega\left[q - \frac{K(t)}{m\omega^2}\right]\cot Q, \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2}\left[q - \frac{K(t)}{m\omega^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \end{aligned}$$

Auflösen nach q und p $\Rightarrow$ kanonische Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{P} &= 2m\omega\cos^2 Q \;\Rightarrow\; p(Q,P) = \sqrt{2m\omega P}\cos Q, \\ q - \frac{K(t)}{m\omega^2} &= \frac{p}{m\omega\cot Q} \;\Rightarrow\; q(Q,P,t) = \frac{K(t)}{m\omega^2} + \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q. \end{aligned}$$

Hamiltonfunktion in den transformierten Koordinaten:

$$\begin{aligned} H'(Q,P,t) &= H(q,p,t) + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t} \\ &= \frac{p^2(Q,P)}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2(Q,P,t) - K(t)q(Q,P,t) \\ &- 2\dot{K}(t)\frac{1}{m\omega^2}\frac{m\omega}{2}\left[q(Q,P,t) - \frac{K(t)}{m\omega^2}\right]\cot Q \\ &= \omega P\cos^2 Q + \omega P\sin^2 Q + \frac{K^2(t)}{2m\omega^2} + K(t)\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ &- \frac{K^2(t)}{m\omega^2} - K(t)\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q - \dot{K}(t)\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\cot Q \\ &= \omega P - \frac{K^2(t)}{2m\omega^2} - \dot{K}(t)\sqrt{\frac{2P}{m\omega^3}}\cos Q. \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'(Q,P)}{\partial P} = \omega - \dot{K}(t)\frac{1}{\sqrt{2m\omega^3 P}}\cos Q,$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial Q} = -\dot{K}(t)\sqrt{\frac{2P}{m\omega^3}}\sin Q.$$

2. Anharmonischer Oszillator (1+3+4+2=10 Bonuspunkte)

Die Hamiltonfunktion eines anharmonischen Oszillators mit einer periodischen externen Kraft sei durch

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + b^2 q^4 + \kappa q \cos(\Omega t)$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right], \\ p &= \sqrt{m\omega}\left[-Q\sin(\Omega t) + P\cos(\Omega t)\right] \end{aligned}$$

kanonisch ist.

Lösung:

Analog zu Aufgabe 1(b), s. Vorlesung:

$f=1$: Die Transformation $(q,p) \to (Q,P)$ ist kanonisch $\Leftrightarrow$ $\{q,p\}_{Q,P} = 1$.

Die Poissonklammer $\{q,p\}_{Q,P}$ für die angegebene Transformation lautet

$$\begin{aligned} \{q,p\}_{Q,P} &= \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\cos(\Omega t)\sqrt{m\omega}\cos(\Omega t) - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\sin(\Omega t)\sqrt{m\omega}[-\sin(\Omega t)] \\ &= \cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t) = 1. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q,Q,t)$ für diese Transformation.

Lösung:

Um die erzeugende Funktion $F(q,Q)$ zu bestimmen, drücken wir zunächst p und P durch q und Q aus:

$$\begin{aligned} &q\sqrt{m\omega} = Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t), \\ &\frac{p}{\sqrt{m\omega}} = -Q\sin(\Omega t) + P\cos(\Omega t) \;\Rightarrow \\ &\cos(\Omega t) q\sqrt{m\omega} - \sin(\Omega t)\frac{p}{\sqrt{m\omega}} = Q[\cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)] = Q \;\Rightarrow \\ &p(q,Q,t) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\cos(\Omega t) q\sqrt{m\omega} - Q\right], \\ &P(q,Q,t) = \frac{1}{\cos(\Omega t)}\left[\frac{p}{\sqrt{m\omega}} + Q\sin(\Omega t)\right] = \frac{1}{\sin(\Omega t)}\left[q\sqrt{m\omega} - Q\cos(\Omega t)\right] \end{aligned}$$

Wir benutzen

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial q} &= \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\cos(\Omega t) q\sqrt{m\omega} - Q\right] \\
&\Rightarrow\ F(q,Q,t) = q\frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\frac{1}{2}\cos(\Omega t) q\sqrt{m\omega} - Q\right] + f_1(Q,t), \\
\frac{\partial F}{\partial Q} &= -\frac{1}{\sin(\Omega t)}\left[q\sqrt{m\omega} - Q\cos(\Omega t)\right] \\
&\Rightarrow\ F(q,Q,t) = -\frac{Q}{\sin(\Omega t)}\left[q\sqrt{m\omega} - \frac{1}{2}Q\cos(\Omega t)\right] + f_2(q,t).
\end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
f_1(Q,t) &= \frac{1}{2}Q^2\cot(\Omega t), \\
f_2(q,t) &= \frac{m\omega}{2}q^2\cot(\Omega t),
\end{aligned}$$

und somit

$$F(q,Q,t) = \frac{1}{2\sin(\Omega t)}\left[\left(q^2 m\omega + Q^2\right)\cos(\Omega t) - 2Qq\sqrt{m\omega}\right].$$

(c) Geben Sie die Hamiltonfunktion $H'(Q,P,t)$ in den neuen Koordinaten an.

Lösung:

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= -\frac{\Omega\cos(\Omega t)}{2\sin^2(\Omega t)}\left[\left(q^2 m\omega + Q^2\right)\cos(\Omega t) - 2Qq\sqrt{m\omega}\right] - \frac{\Omega}{2}\left(q^2 m\omega + Q^2\right) \\
&= \frac{\Omega}{2\sin^2(\Omega t)}\left[2Qq\sqrt{m\omega}\cos(\Omega t) - \left(q^2 m\omega + Q^2\right)\right] \\
&= \frac{\Omega}{2\sin^2(\Omega t)}\left\{2Q\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]\cos(\Omega t) - \left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]^2 - Q^2\right\} \\
&= \frac{\Omega}{2\sin^2(\Omega t)}\left\{2Q^2\cos^2(\Omega t) - Q^2\cos^2(\Omega t) - P^2\sin^2(\Omega t) - Q^2\right\} \\
&= -\frac{\Omega}{2}(P^2 + Q^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p^2(Q,P,t)}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2(Q,P,t) + b^2 q^4(Q,P,t) + \kappa q(Q,P,t)\cos(\Omega t) \\
&= \frac{1}{2m}m\omega\left[-Q\sin(\Omega t) + P\cos(\Omega t)\right]^2 + \frac{m}{2}\omega^2\frac{1}{m\omega}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]^2 \\
&+ \frac{b^2}{m^2\omega^2}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]^4 + \frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]\cos(\Omega t) \\
&= \frac{\omega}{2}\left(P^2 + Q^2\right) + \frac{b^2}{m^2\omega^2}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]^4 \\
&+ \frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]\cos(\Omega t).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H' &= \frac{\omega-\Omega}{2}\left(P^2+Q^2\right)+\frac{b^2}{m^2\omega^2}\left[Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right]^4 \\
&+ \frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left[Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right]\cos(\Omega t).
\end{aligned}
$$

(d) Nehmen Sie an, dass die Frequenz der Kraft fast resonant ist: $0<\delta\ll\omega$, wobei $\delta=\Omega-\omega$. Vernachlässigen Sie die nichtresonanten Terme mit Frequenzen 2Ω und 4Ω in $H'(Q,P,t)$. Schreiben Sie dann die Bewegungsgleichungen für Q und P auf. Was war der Vorteil der verwendeten Transformation?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&\left[Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right]^4=\frac{3}{8}\left(P^2+Q^2\right)^2 \\
&-\frac{1}{2}\left(P^4-Q^4\right)\cos(2\Omega t)+PQ\left(P^2+Q^2\right)\sin(2\Omega t) \\
&+\frac{1}{8}\left(P^4-6P^2Q^2+Q^4\right)\cos(4\Omega t)-\frac{1}{2}PQ\left(P^2-Q^2\right)\sin(4\Omega t) \\
&\quad\to\frac{3}{8}\left(P^2+Q^2\right)^2, \\
&\left[Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right]\cos(\Omega t)=\frac{Q}{2}+\frac{Q}{2}\cos(2\Omega t)+\frac{P}{2}\sin(2\Omega t) \\
&\quad\to\frac{Q}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
H'(Q,P,t)\to\tilde{H}(Q,P,t)=-\frac{\delta}{2}\left(P^2+Q^2\right)+\frac{3b^2}{8m^2\omega^2}\left(P^2+Q^2\right)^2+\frac{\kappa}{2\sqrt{m\omega}}Q
$$

Vorteil: keine Zeitabhängigkeit

Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial\tilde{H}}{\partial P}=-(\Omega-\omega)P+\frac{3b^2}{2m^2\omega^2}P\left(P^2+Q^2\right), \\
\dot{P} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q}=(\Omega-\omega)Q-\frac{3b^2}{2m^2\omega^2}Q\left(P^2+Q^2\right)-\frac{\kappa}{2\sqrt{m\omega}}.
\end{aligned}
$$