Klassische Theoretische Physik II (Theorie B)   Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 7.
Besprechung: 07.06.2016

---

1. Erweitertes Noether-Theorem (5 Punkte)

Betrachten Sie eine einparametrige Schar von infinitesimalen Transformationen der Koordinaten ($i = 1 \dots N$) und der Zeit:

$$x_i \to x_i^* = x_i + \epsilon\psi_i(x, \dot{x}, t), \qquad t \to t^* = t + \epsilon\phi(x, \dot{x}, t).$$

Nehmen Sie an dass die Wirkung als

$$S[x(t)] = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \left[L(x^*, \dot{x}^*, t^*) + \epsilon \frac{df(x^*, t^*)}{dt^*}\right]$$

mit einer beliebigen Funktion $f(x, t)$ transformiert wird. Leiten Sie die (aus der Vorlesung bekannte) Formel für die Erhaltungsgröße Q her.

Lösung:

Mithilfe von

$$\begin{aligned}
t^* = t + \epsilon\phi(x, \dot{x}, t) \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon\frac{d\phi}{dt} \\
x_i^* = x_i + \epsilon\psi_i(x, \dot{x}, t), \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{dx_i^*}{dt}\frac{dt}{dt^*} = \left(\frac{dx_i}{dt} + \epsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right) \Big/ \left(1 + \epsilon\frac{d\phi}{dt}\right) \\
&\simeq \quad \left(\frac{dx_i}{dt} + \epsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right)\left(1 - \epsilon\frac{d\phi}{dt}\right) \simeq \frac{dx_i}{dt} + \epsilon\frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon\frac{dx_i}{dt}\frac{d\phi}{dt}.
\end{aligned}$$

transformieren wir das Integral für die Wirkung

$$\begin{aligned}
S[x(t)] &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \left[L(x^*, \dot{x}^*, t^*) + \epsilon\frac{df(x^*, t^*)}{dt^*}\right] \\
&= S^*[x^*(t^*)] + \epsilon\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{dt^*}{dt}\frac{df(x^*, t^*)}{dt}\frac{dt}{dt^*} = S^*[x^*(t^*)] + \epsilon\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{df(x, t)}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

wobei (s. Vorlesung):

$$\begin{aligned}
S^*[x^*(t^*)] &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \dot{x}^*, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{dt^*}{dt} L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left\{L(x, \dot{x}, t) + \epsilon\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{dt^*}{dt}L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon\to 0} \\
&= S[x(t)] + \epsilon\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{d\epsilon}\left\{\frac{dt^*}{dt}L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right\}\Bigg|_{\epsilon\to 0}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
S[x(t)] &= S[x(t)] + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{dt^*}{dt} L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right]\bigg|_{\epsilon\to 0} + \frac{df(x,t)}{dt} \right\} && (1) \\
\Rightarrow\ & \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{dt^*}{dt} L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right]\bigg|_{\epsilon\to 0} + \frac{df(x,t)}{dt} \right\} = 0. && (2)
\end{aligned}
$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass (s. unten)

$$
\frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{dt^*}{dt} L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right]\bigg|_{\epsilon\to 0} = \frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\phi + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i\right]. \qquad (3)
$$

Mit Gl. (3) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\phi + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i\right] + \frac{df(x,t)}{dt}\right\} = 0 && (4) \\
\Rightarrow\ & \frac{d}{dt}\left\{\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\phi + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i\right] + f(x,t)\right\} = 0. && (5)
\end{aligned}
$$

Erhaltungsgröße:

$$
\begin{aligned}
Q &= Q(x,\dot{x},t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\phi + f(x,t) \\
&= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\psi_i - \dot{x}_i\phi) + L\phi + f(x,t) = \text{const.} && (6)
\end{aligned}
$$

Gleichung (3) – Beweis aus der Vorlesung:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\left\{\frac{dt^*}{dt} L\left(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*\right)\right\}\bigg|_{\epsilon\to 0} &= \frac{d}{d\epsilon}\left\{\left(1+\epsilon\frac{d\phi}{dt}\right) L\left(x_i + \epsilon\psi_i, \dot{x}_i + \epsilon\frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon\dot{x}_i\frac{d\phi}{dt}, t + \epsilon\phi\right)\right\}_{\epsilon\to 0} \\
&= \frac{d\phi}{dt}L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\psi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{d\psi_i}{dt} - \dot{x}_i\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\phi \\
&= \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\phi + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i\right).
\end{aligned}
$$

Wir wollen das als totale zeitliche Ableitung ausdrücken. Dafür verwenden wir

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right) \\
\Rightarrow\ & \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\phi = \frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\phi\right]
\end{aligned}
$$

und erhalten Gl. (3).

2. Erhaltungsgrößen (5+5+5=15 Punkte)

Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße

(a) für ein Teilchen im homogenen Skalarfeld $U(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$;

(b) für ein Teilchen im Feld einer bewegten Welle $U(\vec{r},t) = U(\vec{r}-\vec{v}t)$, wobei $\vec{v}$ ein konstanter Vektor ist;

(c) wenn die Wirkung unter der Transformation

$$x = x^*\cosh\lambda + c\,t^*\sinh\lambda, \qquad t = \frac{x^*}{c}\sinh\lambda + t^*\cosh\lambda$$

mit $c = \text{const}$ invariant ist.

Lösung:

(a): Die potentielle Energie $U(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$ (und damit die Wirkung) ist invariant für:

(i) räumliche Translation in Richtungen senkrecht zu $\vec{F}$
$\Rightarrow$ Erhaltung der Impulskomponenten senkrecht zu $\vec{F}$;

(ii) Drehung um die Achse parallel zu $\vec{F}$
$\Rightarrow$ Erhaltung der Drehimpulskomponente parallel zu $\vec{F}$;

(ii) Zeittranslation
$\Rightarrow$ Erhaltung der Energie.

(b): Mit der Transformation der Koordinaten

$$t^* = t, \quad \vec{r}^{\,*} = \vec{r} - \vec{v}t$$

ist die Lagrange-Funktion zeitunabhängig:

$$L^* = L(\vec{r}^{\,*}, \dot{\vec{r}}^{\,*}, t^*) = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}^{\,*} + \vec{v}\right)^2 - U(\vec{r}^{\,*}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}^{\,*}\right)^2 + m\dot{\vec{r}}^{\,*}\cdot\vec{v} + \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}^{\,*}).$$

Daraus folgt die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E^* &= \sum_i \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_i^*}\dot{x}_i^* - L^* = \left[m\left(\dot{\vec{r}}^{\,*}\right)^2 + m\dot{\vec{r}}^{\,*}\cdot\vec{v}\right] - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}^{\,*}\right)^2 + m\dot{\vec{r}}^{\,*}\cdot\vec{v} + \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}^{\,*})\right] \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}^{\,*}\right)^2 - \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}^{\,*}) = \text{const}, \end{aligned}$$

und damit

$$E^* = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}} - \vec{v}\right)^2 - \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}-\vec{v}t) \quad = \quad \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(\vec{r}-\vec{v}t) - m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{v}.$$

Die Erhaltungsgröße ist dann

$$H - \vec{p}\cdot\vec{v} = \text{const}$$

wobei

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L, \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i.$$

(c): $x^* = x\cosh\lambda - c\,t\sinh\lambda, \qquad t^* = t\cosh\lambda - \frac{x}{c}\sinh\lambda.$

Für $\lambda \to 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x^* &= x - \lambda\, c\, t + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad \Rightarrow \quad \psi = -ct, \\ t^* &= t - \lambda\, \frac{x}{c} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{x}{c} \end{aligned}$$

und verwenden das Noether-Theorem:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-ct) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\left(-\frac{x}{c}\right) = \text{const.}$$

Daraus folgt:

$$Ex - p_x c^2 t = \text{const.}$$

3. Ähnlichkeitstransformation (10+5+5=20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Wirkung für ein Teilchen im Potential $U(\vec{r}) = a/r^2$ unter der infinitesimalen Transformation $\vec{r}^* = (1+\epsilon)\vec{r}, \quad t^* = (1+2\epsilon)t$ invariant ist. Geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße Q an. Vereinfachen Sie diese mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes und bestimmen Sie daraus die Bahnkurve des Teilchens.

Lösung:

Lagrange-Funktion:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{a}{r^2}.$$

Transformation:

$$r_i^* = r_i + \epsilon\psi_i \quad \text{mit} \quad \psi_i = r_i, \qquad t^* = t + \epsilon\phi \quad \text{mit} \quad \phi = 2t,$$

$$\dot{\vec{r}}^* = \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} = \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[1 - \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\dot{\vec{r}}.$$

Invarianz:

$$\begin{aligned} S^* &= \int dt^* L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*, t^*) = \int dt^* \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\right)^2 - \frac{a}{(r^*)^2}\right] \\ &= \int dt (1+2\epsilon)\left[\frac{m}{2}(1-\epsilon)^2\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{a}{(1+\epsilon)^2 r^2}\right] \\ &= \int dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{a}{r^2}\right] = S. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Invarianzbedingung erfüllt (s. auch Teilaufgabe 3b).

Erhaltungsgröße:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\psi_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\dot{r}_i\right)\phi.$$

Energieerhaltungssatz:

$$L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\dot{r}_i = -\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{a}{r^2} = -E.$$

Damit folgt:

$$Q = \sum_i m\dot{r}_i r_i - 2Et = m\vec{v}\cdot\vec{r} - 2Et,$$

wobei

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{2}\frac{dr^2}{dt} - 2Et = \text{const.}$$

Bahnkurve:

$$r^2 = \frac{2E}{m}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Die Konstante C_1 und C_2 werden durch Anfangsbedingungen bestimmt.

(b) Das Potential in Teilaufgabe 3(a) erfüllt die Gleichung $U(\vec{r}) = \alpha^n\, U(\alpha\vec{r})$ mit $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Wirkung unter der Ähnlichkeitstransformation $\vec{r}^* = \alpha\vec{r}$ nur für $n = 2$ invariant sein kann.

Lösung:

Mit $\vec{r}^* = \alpha\vec{r}$ und $t^* = \beta t$ lautet der Beitrag der kinetischen Energie zur Wirkung S^*:

$$\int dt^* \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta}\int dt \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Invarianz für} \quad \beta = \alpha^2.$$

Der Beitrag der potentiellen Energie ist dann:

$$-\int dt^* U(\vec{r}^*) = -\frac{\beta}{\alpha^n}\int dt U(\vec{r}) = -\frac{\alpha^2}{\alpha^n}\int dt U(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \qquad \text{Invarianz nur für} \quad n = 2.$$

(c) Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße für ein Teilchen im Magnetfeld, das durch ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \alpha\vec{A}(\alpha\vec{r})$ gegeben ist.

Lösung:

Die Wirkung eines Teilchens mit der Ladung q im Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \alpha\vec{A}(\alpha\vec{r})$ lautet:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + q\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\alpha\vec{A}(\alpha\vec{r})\right]$$

Mit

$$\vec{r}^* = \alpha\vec{r}, \quad t^* = \beta t = \alpha^2 t$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} \frac{dt^*}{\beta}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\right)^2 + q\frac{\beta}{\alpha}\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\cdot\alpha\vec{A}(\vec{r}^*)\right] \\ &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^*\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\right)^2 + q\frac{d\vec{r}^*}{dt^*}\cdot\vec{A}(\vec{r}^*)\right] = S^*. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir $\alpha = 1+\epsilon$ mit $\epsilon \to 0$: $\vec{r}^* = (1+\epsilon)\vec{r}, \quad t^* = (1+2\epsilon)t$.

Noether-Theorem:

$$\begin{aligned}
&\psi_i = x_i, \quad \phi = 2t \\
&\Rightarrow \quad Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i \right)\phi \\
&\quad = \sum_i p_i x_i - 2Et = \left[m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r}) \right] \cdot \vec{r} - 2Et = \text{const.}
\end{aligned}$$