Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 8.
Besprechung: 14.06.2016

1. Das ebene Doppel-Pendel (4+6+4=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte ebene Doppel-Pendel. Beide Massenpunkte bewegen sich nur in der x-z Ebene. Die Massen der Massenpunkte sind m_1 und m_2 und die Längen der masselosen Stäbe sind l_1 und l_2. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse.

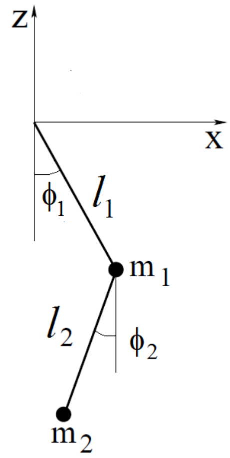


Abbildung 1.

(a) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten die Winkel ϕ_1 und ϕ_2. Geben Sie die Matrizen m_{ij} und V_{ij} des allgemeinen Verfahrens für kleine Schwingungen an. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ_1 und ϕ_2 her.

(b) Stellen Sie die Eigenwertgleichung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k an.

(c) Betrachten Sie nun das Pendel mit $l_1 = l_2 = l$. Geben Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ an und beschreiben Sie die Bewegung des Pendels in beiden Fällen.

Lösung:

(a). Wir schreiben

$$x_1 = l_1 \sin\phi_1, \quad z_1 = -l_1\cos\phi_1,$$
$$x_2 = x_1 + l_2\sin\phi_2, \quad z_2 = z_1 - l_2\cos\phi_2.$$

Dann gilt

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1, \quad \dot{z}_1 = l_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1,$$
$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\cos\phi_2, \quad \dot{z}_2 = l_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\sin\phi_2.$$

Die kinetische Energie dann lautet

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{z}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right], \end{aligned}$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1-\phi_2)$ benutzt haben.

Die potenzielle Energie:

$$U = g(m_1z_1 + m_2z_2) = -(m_1+m_2)gl_1\cos\phi_1 - m_2gl_2\cos\phi_2.$$

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(\phi_1,\phi_2,\dot\phi_1,\dot\phi_2) = T - U &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot\phi_2^2 + 2l_1l_2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot\phi_1\dot\phi_2\right] \\ &+ (m_1+m_2)gl_1\cos\phi_1 + m_2gl_2\cos\phi_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_1} = \frac{\partial L}{\partial\phi_1}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_2} = \frac{\partial L}{\partial\phi_2}.$$

Bewegungsgleichungen:

$$\ddot\phi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\left[\dot\phi_2^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l_1}\sin\phi_1 = 0, \tag{2}$$

$$\ddot\phi_2 + \frac{l_1}{l_2}\left[-\dot\phi_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot\phi_1\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l_2}\sin\phi_2 = 0. \tag{3}$$

Für kleine Schwingungen $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$ können die Gleichungen (1), (2) und (3) linearisiert werden. Das bedeutet, dass wir die folgenden Näherungen benutzen:

$$\sin\phi_1 \approx \phi_1, \quad \sin\phi_2 \approx \phi_2, \quad \cos\phi_1 \approx 1 - \frac{\phi_1^2}{2}, \quad \cos\phi_2 \approx 1 - \frac{\phi_2^2}{2}.$$

Dann gilt auch

$$\sin(\phi_1-\phi_2) \approx \phi_1 - \phi_2, \quad \cos(\phi_1-\phi_2) \approx 1 - \frac{(\phi_1-\phi_2)^2}{2}.$$

Lagrange-Funktion für kleine Schwingungen:

$$\begin{aligned} L(\phi_1,\phi_2,\dot\phi_1,\dot\phi_2) &\approx \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot\phi_2^2 + 2l_1l_2\dot\phi_1\dot\phi_2\right] \\ &+ (m_1+m_2)gl_1\left(1-\frac{\phi_1^2}{2}\right) + m_2gl_2\left(1-\frac{\phi_2^2}{2}\right) && (4) \\ &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot\phi_1 + l_2\dot\phi_2\right)^2 \\ &- \frac{(m_1+m_2)gl_1}{2}\phi_1^2 - \frac{m_2gl_2}{2}\phi_2^2 + (m_1+m_2)gl_1 + m_2gl_2 && (5) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(m_{ij}\dot\phi_i\dot\phi_j - V_{ij}\phi_i\phi_j\right) + (m_1+m_2)gl_1 + m_2gl_2. && (6) \end{aligned}$$

Matrizen m_{ij} und V_{ij}:

$$\hat m = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \hat V = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen:
mithilfe von Gl. (7), $\sum_{j=1,2}(m_{ij}\ddot\phi_j + V_{ij}\phi_j) = 0,\ i = 1,2$, oder aus der Linearisierung von Gln. (2) und (3) $\Rightarrow$

$$\ddot\phi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot\phi_2 + \frac{g}{l_1}\phi_1 = 0, \tag{8}$$

$$\ddot\phi_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot\phi_1 + \frac{g}{l_2}\phi_2 = 0\,. \tag{9}$$

(b). Eigenwertgleichung: $\det(\hat{V}-\omega^2\hat{m})=0$,

$$\begin{aligned}
\hat{V}-\omega^2\hat{m} &= \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1-\omega^2(m_1+m_2)l_1^2 & -\omega^2 m_2l_1l_2 \\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2gl_2-\omega^2 m_2 l_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\hat{V}-\omega^2\hat{m})=0 \;\; &\Rightarrow \;\; \left[(m_1+m_2)gl_1-\omega^2(m_1+m_2)l_1^2\right]\left[m_2gl_2-\omega^2m_2l_2^2\right] \\
&- \;\; (-\omega^2m_2l_1l_2)(-\omega^2m_2l_1l_2)=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega^4 m_1m_2l_1^2l_2^2-\omega^2(m_1+m_2)m_2gl_1l_2(l_1+l_2)+(m_1+m_2)m_2g^2l_1l_2=0.$$

Eigenfrequenzen:

$$\omega_1^2=\frac{2g}{(l_1+l_2)+\sqrt{(l_1+l_2)^2-4l_1l_2m_1/(m_1+m_2)}}, \tag{10}$$

$$\omega_2^2=\frac{2g}{(l_1+l_2)-\sqrt{(l_1+l_2)^2-4l_1l_2m_1/(m_1+m_2)}}. \tag{11}$$

Eigenvektoren (nicht normierte):

$$\sum_{i=1,2}\left(V_{ij}-\omega_k^2m_{ij}\right)A_j^{(k)}=0,$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} m_2/(m_1+m_2) \\ -\dfrac{l_1-l_2-d}{2l_2} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2/(m_1+m_2) \\ -\dfrac{l_1-l_2+d}{2l_2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

mit

$$d=\sqrt{(l_1+l_2)^2-4l_1l_2m_1/(m_1+m_2)}. \tag{13}$$

Aus den Vektoren $A_i^{(k)}$ bilden wir die quadratische Matrix $\hat{a}$ mit Koeffizienten c_i:

$$\begin{aligned}
\hat{a}=(a_{ij}) &= \left(c_1A^{(1)},c_2A^{(2)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} c_1m_2/(m_1+m_2) & c_2m_2/(m_1+m_2) \\ -c_1\dfrac{l_1-l_2-d}{2l_2} & -c_2\dfrac{l_1-l_2+d}{2l_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten c_i werden aus der Normierung

$$\hat{a}^T\hat{m}\hat{a}=\hat{1}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2}\frac{1}{m_1(l_1-l_2)^2+m_2(l_1+l_2)^2+d[l_1(m_2-m_1)+l_2(m_1+m_2)]}\right\}^{1/2}, \\
c_2 &= \left\{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2}\frac{1}{m_1(l_1-l_2)^2+m_2(l_1+l_2)^2-d[l_1(m_2-m_1)+l_2(m_1+m_2)]}\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Normalkoordinaten:

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \hat{a} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \hat{a}\vec{Q} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{Q} = \hat{a}^{-1}\vec{\phi}.$$

$$\hat{a}^T \hat{m} \hat{a} = \hat{1} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{a}^{-1} = \hat{a}^T \hat{m} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{Q} = \hat{a}^T \hat{m} \vec{\phi}.$$

Deswegen erhalten wir:

$$Q_1 = \frac{c_1 m_2}{2} \left[l_1(l_1 + l_2 + d)\phi_1 + l_2 \left(l_1 + l_2 - \frac{m_1 l_1}{m_1 + m_2} + d \right) \phi_2 \right], \qquad (14)$$

$$Q_2 = \frac{c_2 m_2}{2} \left[l_1(l_1 + l_2 - d)\phi_1 + l_2 \left(l_1 + l_2 - \frac{m_1 l_1}{m_1 + m_2} - d \right) \phi_2 \right]. \qquad (15)$$

(c). Für $l_1 = l_2 = l$ erhalten wir aus Gln. (10) und (11):

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g/l}{1 \pm \sqrt{m_2/(m_1+m_2)}}. \qquad (16)$$

Für $m_1 \gg m_2$ gilt

$$\omega_{1,2}^2 \approx \frac{g}{l}.$$

Das bedeutet, dass die Masse m_1 fast ruhig ist, und die Masse m_2 oszilliert mit der üblichen Frequenz $\sqrt{g/l}$.

Für $m_1 \ll m_2$ gilt

$$\omega_1^2 \approx \frac{g/l}{1 + [1 - m_1/(2m_2)]} \approx \frac{g}{2l}$$

und

$$\omega_2^2 \approx \frac{g/l}{1 - \sqrt{1 - m_1/m_2}} \approx \frac{g/l}{1 - [1 - m_1/(2m_2)]} = \frac{2g}{l}\frac{m_2}{m_1}.$$

Die erste Mode (ω_1) entspricht einem Pendel der Länge $2l$. Für diese Mode gilt $a_2 \approx a_1$, d.h., dass das Doppel-Pendel sich wie ein einzelnes Pendel der Länge $2l$ bewegt. Für die zweite Mode (ω_2) gilt $a_2 \approx -a_1$. Das bedeutet, dass die Masse m_2 ungefähr in Ruhe bleibt und m_1 schwingt.

2. Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt. (3+4+5=12 Punkte)

Ein ebenes Pendel mit der Masse m und Fadenlänge l, dessen Aufhängepunkt (der die Masse M besitzt) sich entlang einer horizontalen Geraden frei bewegen kann, ist rechts abgebildet. Gesucht sei die Frequenz der Schwingungen des Systems.

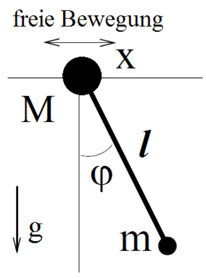


Abbildung 2.

(a) Benutzen Sie φ und x (s. Abb. 2) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion, die Energie und die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen) für dieses System an.

(b) Zeigen Sie, dass die horizontale Komponente des Schwerpunktimpulses (P_x) eine Erhaltungsgröße ist. Setzen Sie $P_x = 0$ und eliminieren Sie die zyklische Koordinate in der Bewegungsgleichung und Energie.

(c) Betrachten Sie zunächst den Fall kleiner Schwingungen. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k an und bestimmen Sie die Frequenzen der Schwingungen. Was ergibt sich im Limes $M \to \infty$?

5 Bonuspunkte: Betrachten Sie nun den Fall einer beliebigen Schwingungsamplitude $\varphi_{\max}$. Bestimmen Sie aus der Energieerhaltung die Schwingungsdauer des Pendels als Integral über die nicht-zyklische Koordinate.

Lösung:

(a).

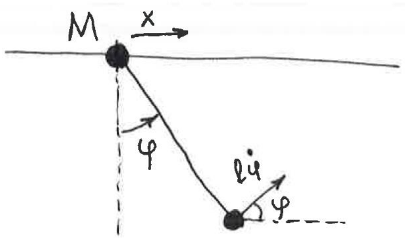
$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{m}{2}\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$$

$$= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$U = mgl\,(1-\cos\varphi)$$

$$L = T - U$$

$$E = T + U$$



Bewegungsgleichungen:

für x: $$\frac{d}{dt}\left[(M+m)\dot{x} + m l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0$$

für φ: $$\frac{d}{dt}\left[m l^2\dot{\varphi} + m l\dot{x}\cos\varphi\right] = -\,mgl\sin\varphi - m l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

(b). x - zyklisch

$$\frac{dP_x}{dt} = 0\,, \qquad P_x = (M+m)\dot{x} + m l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$= M\dot{x} + m\underbrace{(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)}_{= v_x^{(m)}} = P_x^{(M)} + P_x^{(m)}$$

— x-Komponente des Impulses des Systems

$$P_x = 0 \quad \to \quad \dot{x} = -\frac{m}{M+m}\, l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\to \quad E = \frac{M+m}{2}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{m}{2} l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m^2}{M+m} l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + mgl(1-\cos\varphi)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2\dot{\varphi}^2\left[1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi\right] + mgl\,(1-\cos\varphi)$$

Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(l\dot{\varphi} + \dot{x}\cos\varphi\right) = -\,g\sin\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\to \frac{d}{dt}\left[l\dot{\varphi}\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi\right)\right] = -\,g\sin\varphi + \frac{m}{M+m}\, l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi$$

(c). Kleine Schwingungen ($\phi \ll 1$):

$$l\frac{M}{M+m}\ddot{\varphi} = -g\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}.$$

Um Normalkoordinaten anzugeben, verwenden wir das allgemeine Verfahren für kleine Schwingungen ($x_1 = x$ und $x_2 = l\varphi$):

$$\begin{aligned} L(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + 2m\dot{x}_1\dot{x}_2\right] - \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j\right), \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix}, \qquad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg/l \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} \hat{V} - \omega^2\hat{m} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg/l \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^2(M+m) & -\omega^2 m \\ -\omega^2 m & mg/l - \omega^2 m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{V} - \omega^2\hat{m}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\omega^2(M+m)\left(mg/l - \omega^2 m\right) - (-\omega^2 m)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \omega^2[(M+m)(mg/l - \omega^2 m) + \omega^2 m^2] = 0. \end{aligned}$$

Eigenfrequenzen:

$$\omega_1^2 = 0, \tag{18}$$

$$\omega_2^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}. \tag{19}$$

Eigenvektoren (nicht normierte):

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + M/m \end{pmatrix} \tag{20}$$

Aus den Vektoren $A_i^{(k)}$ bilden wir die quadratische Matrix $\hat{a}$ mit Koeffizienten c_i:

$$\hat{a} = (a_{ij}) = \left(c_1A^{(1)}, c_2A^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & -c_2(1+M/m) \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten c_i werden aus der Normierung

$$\begin{aligned} \hat{a}^T\hat{m}\hat{a} &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & -c_2(1+M/m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+M & m \\ m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & -c_2(1+M/m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1^2(M+m) & 0 \\ 0 & c_2^2M(1+M/m) \end{pmatrix} = \hat{1} \end{aligned}$$

bestimmt:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{M+m}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{m}{M(m+M)}}.$$

Somit erhalten wir

$$\hat{a} = (a_{ij}) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M+m}} & \sqrt{\frac{m}{M(M+m)}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{M+m}{Mm}} \end{pmatrix}.$$

Normalkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} &= \hat{a}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \hat{a}^T \hat{m} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{M+m} & \frac{m}{\sqrt{M+m}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{M}{M+m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\
Q_1 &= \sqrt{M+m}\, x_1 + \frac{m}{\sqrt{M+m}}\, x_2 = \sqrt{M+m}\, x + \frac{m}{\sqrt{M+m}}\, l\varphi, \qquad (21) \\
Q_2 &= -\sqrt{\frac{Mm}{M+m}}\, x_2 = -\sqrt{\frac{Mm}{M+m}}\, l\varphi. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Für $M \to \infty$ erhalten wir:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \Rightarrow \qquad (23)$$

harmonische Schwingungen des gewöhnlichen Pendels.

5 Bonuspunkte:

Beliebige Amplitude φ_{max}

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \left[1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi\right] + mgl(1-\cos\varphi) = E \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{E - mgl(1-\cos\varphi)}{\frac{1}{2} m l^2 \left[1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi\right]}$$

$$\varphi = \varphi_{max} \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = mgl(1-\cos\varphi_{max})$$

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l} \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_{max}}{1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi}$$

Schwingungsdauer T_0

$$T_0 = 4\int_0^{\varphi_{max}} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi \sqrt{\frac{1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\varphi}{\cos\varphi - \cos\varphi_{max}}}$$

$(\omega = 2\pi / T_0)$

Prüfe Limes der kleinen Auslenkungen ($\varphi_{max} \ll 1$):

$$\rightarrow T_0 \simeq 4\sqrt{l/2g} \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi \frac{\sqrt{1 - \frac{m}{M+m}}}{\sqrt{(\varphi_{max}^2 - \varphi^2)/2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}\frac{M}{M+m}} \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{= \pi/2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{M}{M+m}}$$

3. Asymmetrisches dreiatomiges Molekül (3+5+6=14 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 3 skizzierte Model für ein dreiatomiges lineares Molekül. Die drei Atome der Masse $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = M$ sind über zwei Federn der Federkonstanten k und $2k$ miteinander verbunden und können sich nur entlang der Molekülachse bewegen. Der Gleichgewichtsabstand zwischen benachbarten Atomen sei l. Die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen werden mit x_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet.

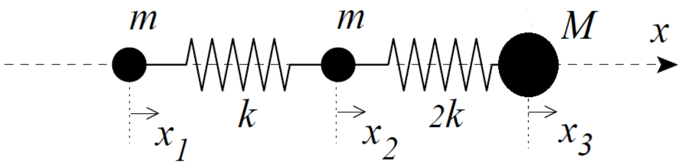


Abbildung 3.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Moleküles und die zugehörigen Matrizen m_{ij} und V_{ij} an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenvektoren. Was ergibt sich im Limes $M \to \infty$?

(c) Betrachten Sie nun den Fall $M = 2m$. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k und die allgemeine reelle Lösung an.

5 Bonuspunkte: Bestimmen Sie mithilfe der obigen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x_1(t = 0) = x_2(t = 0) = 0,\ x_3(t = 0) = l$ und $\dot{\vec{x}}(t = 0) = 0$.

Lösung:

(a). Die Langrange-Funktion des Moleküles lautet:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{M}{2}\dot{x}_3^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 - k(x_3 - x_2)^2 \,. \tag{24}$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{x}}^T \hat{m} \dot{\vec{x}} - \vec{x}^T \hat{V} \vec{x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left[m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_i x_j\right]$$

mit den beiden (symmetrischen) Matrizen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 3k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{pmatrix} .$$

(b). Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 3k - \omega^2 m & -2k \\ 0 & -2k & 2k - \omega^2 M \end{pmatrix} \\ &= (k - \omega^2 m)(3k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 M) - k^2(2k - \omega^2 M) - 4k^2(k - \omega^2 m) \\ &= -\omega^2\left[Mm^2\omega^4 - 2km(2M + m)\omega^2 + 2k^2(M + 2m)\right] . \end{aligned}$$

Eigenfrequenzen:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= 0, && (25)\\
\omega_2^2 &= \frac{k}{M}\left(1+\frac{2M}{m}-\sqrt{1+\frac{2M^2}{m^2}}\right), && (26)\\
\omega_3^2 &= \frac{k}{M}\left(1+\frac{2M}{m}+\sqrt{1+\frac{2M^2}{m^2}}\right). && (27)
\end{aligned}$$

Eigenvektoren (nicht normierte):

$$\sum_{i=1,2}\left(V_{ij}-\omega_k^2 m_{ij}\right)A_j^{(k)}=0,$$

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, && (28)\\
A^{(2)} &= \begin{pmatrix}1\\ -1-\frac{m}{M}+\sqrt{2+\frac{m^2}{M^2}}\\ \frac{m^2}{M^2}-\frac{m}{M}\sqrt{2+\frac{m^2}{M^2}}\end{pmatrix}, && (29)\\
A^{(3)} &= \begin{pmatrix}1\\ -1-\frac{m}{M}-\sqrt{2+\frac{m^2}{M^2}}\\ \frac{m^2}{M^2}+\frac{m}{M}\sqrt{2+\frac{m^2}{M^2}}\end{pmatrix}. && (30)
\end{aligned}$$

Limes $M\to\infty$:

$$\omega_2^2 = (2-\sqrt{2})k/m, \quad \omega_3^2=(2+\sqrt{2})k/m. \qquad (31)$$

(c). Für $M=2m$ erhalten wir:

$$\omega_2 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_3 = 2\sqrt{k/m}. \qquad (32)$$

und

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad A^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix}, \quad A^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Aus den Vektoren $A_i^{(k)}$ bilden wir die quadratische Matrix $\hat{a}$ mit Koeffizienten c_i:

$$\hat{a}=(a_{ij}) = \left(c_1A^{(1)},c_2A^{(2)},c_3A^{(3)}\right)=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ c_1 & 0 & -3c_3\\ c_1 & -c_2/2 & c_3\end{pmatrix}.$$

Aus der Normierung

$$\hat{a}^T\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 2m\end{pmatrix}\hat{a}=\hat{1}$$

bestimmen wir die Koeffizienten c_i:

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2}{3m}}, \quad c_3 = \frac{1}{2\sqrt{3m}}. \tag{34}$$

und erhalten

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \sqrt{\frac{2}{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}} & -\frac{1}{\sqrt{6m}} & \frac{1}{2\sqrt{3m}} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Normalkoordinaten:

$$\vec{Q} = \hat{a}^T \hat{m} \vec{x} \qquad \Rightarrow \tag{36}$$

$$Q_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3), \tag{37}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2m}{3}}(x_1 - x_3), \tag{38}$$

$$Q_3 = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}(x_1 - 3x_2 + 2x_3). \tag{39}$$

Lösung mit $\omega_1^2 = 0$: In Normalkoordinaten lautet die enstprechende Gleichung

$$\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \ddot{Q}_1 = 0$$

und damit ist die Lösung gegeben durch

$$Q_1(t) = \beta_1 t + \alpha_1 \,,$$

was einer gleichförmigen Bewegung des gesamten Moleküles entspricht.

Die allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \beta_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3) \tag{40}$$

mit den sechs reellen Konstanten α_i, β_i $(i = 1, 2, 3)$. Es sind sechs Konstanten, da wir es mit drei Differentialgleichungen zweiter Ordung zu tun haben.

5 Bonuspunkte:

Die beiden Randbegingungen führen auf die Gleichungen

$$\alpha_1 + \beta_2 \cos(\alpha_2) + \beta_3 \cos(\alpha_3) = 0, \tag{41}$$

$$\alpha_1 \qquad - 3\beta_3 \cos(\alpha_3) = 0, \tag{42}$$

$$\alpha_1 - \frac{\beta_2}{2} \cos(\alpha_2) + \beta_3 \cos(\alpha_3) = l, \tag{43}$$

$$\beta_1 - \beta_2 \omega_2 \sin(\alpha_2) - \beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0, \tag{44}$$

$$\beta_1 \qquad + 3\beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0, \tag{45}$$

$$\beta_1 + \frac{\beta_2}{2} \omega_2 \sin(\alpha_2) - \beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0. \tag{46}$$

Gl. (41)+Gl. (42)+2× Gl. (43) $\;\Rightarrow\;$ $\alpha_1 = l/2$.

Gl. (42) $\;\Rightarrow\;$ $\beta_3 \cos(\alpha_3) = l/6$.

Gl. (41) $\;\Rightarrow\;$ $\beta_2 \cos(\alpha_2) = -2l/3$.

Gl. (44)+Gl. (45)+2× Gl. (46) $\;\Rightarrow\;$ $\beta_1 = 0$.

Gl. (45) $\;\Rightarrow\;$ $\beta_3 \sin(\alpha_3) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_3 = 0 \;\Rightarrow\; \beta_3 = l/6$.

Gl. (46) $\;\Rightarrow\;$ $\beta_2 \sin(\alpha_2) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0 \;\Rightarrow\; \beta_2 = -2l/3$.

Spezielle Lösung:

$$\vec{x}(t) = \frac{l}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2l}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{k/m}\;t\right) + \frac{l}{6}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\cos\left(2\sqrt{k/m}\;t\right). \tag{47}$$