Klassische Theoretische Physik II (Theorie B) **Sommersemester 2016**

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Musterlösung: Blatt 9.
Besprechung: 21.06.2016

---

1. Foucault-Pendel (8+7+5=20 Punkte)

Ein mathematisches Pendel befindet sich in einem Punkt P der Nordhalbkugel der Erdoberfläche mit der geographischen Breite ϕ. Wenn die Erddrehung vernachlässigt wird, werden die Pendelschwingungen bei kleinen Auslenkungen durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2.$$

Hier zeigen die $\hat{e}_{1,2}$-Achsen tangentiell zur Erdoberfläche in P (z.B., $\hat{e}_1$ nach Süden und $\hat{e}_2$ nach Osten), und die $\hat{e}_3$-Achse senkrecht zur Erdoberfläche in P nach oben. Insbesondere, mit den Anfangsbedingungen $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ und beliebige $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$ schwingt das Pendel ausschließlich in der x_1x_3-Ebene.

Die Aufgabe ist, den Einfluss der Erddrehung auf die Pendelschwingung zu berechnen. Es ist angenommen, dass die Frequenz der Erddrehung $\omega = 2\pi/(24 \text{ Std})$ viel kleiner als ω_0 ist.

(a) Geben Sie die (gekoppelte) Differentialgleichungen für x_1 und x_2 in dem rotierenden (nicht-inertialen) System an, das mit der sich drehenden Erde fest verbunden ist. Nutzen Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Transformationseigenschaften von Geschwindigkeiten und Basisvektoren unter Rotationen.

(b) Führen Sie die komplexe Koordinate $w = x_1 + ix_2$ ein, und reduzieren Sie damit das System der Differentialgleichungen auf eine komplexe Differentialgleichung. Lösen Sie diese Gleichung mit dem Ansatz $w(t) = Ce^{i\lambda t}$.

(c) Bestimmen Sie mit welcher Winkelgeschwindigkeit sich die Ebene dreht, in der das Pendel schwingt. Um wieviel Grad pro Stunde dreht sich die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels in Karlsruhe ($\phi = 49^\circ$)? In welche Richtung?

Lösung:

(a). Wir wählen die Gleichgewichtslage des Pendels als Position des Ursprungs des rotierenden Koordinatensystems (RS), s. Abb. 1. Wir bezeichnen die Position des Massenpunktes in RS als

$$\vec{r}\,' = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3.$$

Im inertialen Koordinatsystem (IS) schreiben wir die Gleichgewichtslage (Ursprung von RS) als

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{e}_x + y_0\hat{e}_y + z_0\hat{e}_z$$

und die Position des Massenpunktes als

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z.$$

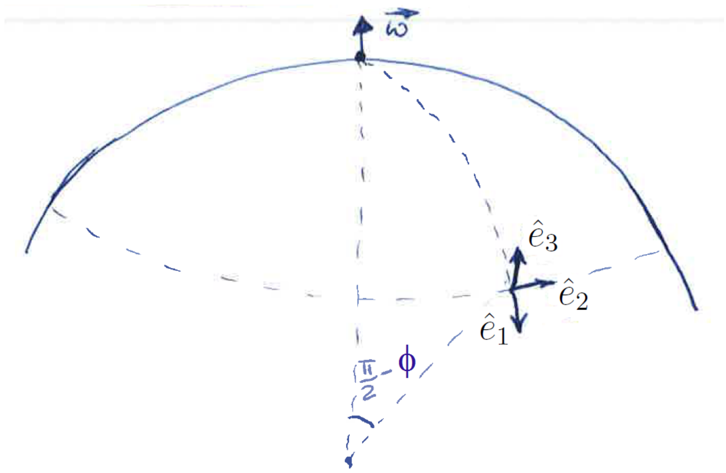

Abbildung 1.

Bei der Zeitableitung eines Vektors, der in einem rotierenden Bezugssystem gegeben ist, muss die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega_z \hat{e}_z$ des Bezugssystems berücksichtigt werden:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i. \tag{1}$$

Die kinematischen Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{r}\,', && (2)\\
\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \\
&= \vec{v}_0 + x_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + x_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + x_3\frac{d\hat{e}_3}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\hat{e}_3 && (3)\\
&= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,', && (4)
\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{v}\,' = \frac{dx_1}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\hat{e}_3$$

die Geschwindigkeit des Massenpunktes in RS ist. In unserem Fall gilt: $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}_0$. Somit erhalten wir

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{5}$$

Die Beschleunigung in IS dann lautet:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{d^2x_1}{dt^2}\hat{e}_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2}\hat{e}_2 + \frac{d^2x_3}{dt^2}\hat{e}_3 + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\frac{d\hat{e}_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt}\frac{d\hat{e}_3}{dt} \\
&+ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}), && (6)
\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{a}\,' = \frac{d^2x_1}{dt^2}\hat{e}_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2}\hat{e}_2 + \frac{d^2x_3}{dt^2}\hat{e}_3$$

die Beschleunigung in RS ist. Da $\vec{\omega}$ zeitunabhängig ist ($\dot{\vec{\omega}} = 0$), erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_0] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \end{aligned} \tag{7}$$

Der Beitrag $\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_0]$ bestimmt die Gleichgewichtslage des Pendels in der Gegenwart der Erdrotation. Für die kleine Auslenkungen $\vec{r}'$ aus der Gleichgewichtslage erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] = -\omega_0^2 \vec{r}'. \tag{8}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in RS ist durch

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

gegeben, mit (s. Abb. 1)

$$\omega_1 = -\omega \cos\phi, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \omega \sin\phi. \tag{9}$$

Es folgt :

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}')_1 = \omega_2 v_3' - \omega_3 v_2' = -\omega_3 v_2' = -\omega \sin\phi \frac{dx_2}{dt}, \tag{10}$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}')_2 = \omega_3 v_1' - \omega_1 v_3' \overbrace{\simeq}^{v_3' \ll v_{1,2}'} \omega_3 v_1' = \omega \sin\phi \frac{dx_1}{dt}, \tag{11}$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}')_3 = \omega_1 v_2' - \omega_2 v_1' = \omega_1 v_2' = -\omega \cos\phi \frac{dx_2}{dt}. \tag{12}$$

und

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'\omega^2 = \vec{\omega}(\omega_1 x_1 + \omega_3 x_3) - \vec{r}'\omega^2. \tag{13}$$

Für $\omega_0 \gg \omega$ wird der Beitrag von $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ (sogenannte *Coriolisbeschleunigung*) viel größer als der Beitrag von $\vec{a}_z = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']$ (sogenannte *Zentrifugalbeschleunigung*):

$$a_c \sim \omega\omega_0 r' \gg a_z \sim \omega^2 r'.$$

Aus diesem Grund vernachlässigen wir die Zentrifugalbeschleunigung. Deswegen erhalten wir die gekoppelte Differentialgleichungen für x_1 und x_2 in RS:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 + 2\omega \sin\phi \frac{dx_2}{dt}, \tag{14}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_0^2 x_2 - 2\omega \sin\phi \frac{dx_1}{dt}. \tag{15}$$

(b). Gl. (14)+i Gl. (15) $\Rightarrow$

$$\ddot{w} + 2i\omega \sin\phi \dot{w} + \omega_0^2 w = 0, \tag{16}$$

wobei $w = x_1 + ix_2$. Mit dem Ansatz

$$w(t) = Ce^{i\lambda t}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &-\lambda^2 - 2\omega\sin\phi\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \\ &\lambda = -\omega\sin\phi \pm \sqrt{\omega^2\sin^2\phi + \omega_0^2} \simeq -\omega_z \pm \omega_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Die allgemeine Lösung:

$$w(t) = c_1 e^{i\lambda_1 t} + c_2 e^{i\lambda_2 t} = e^{-i\omega t\sin\phi}\left(c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}\right) \tag{18}$$

oder explizit für x_1 und x_2:

$$x_1(t) \;=\; \mathrm{Re}w(t) = |c_1|\cos(\omega_0 t - \omega t\sin\phi + \varphi_1) + |c_2|\cos(\omega_0 t + \omega t\sin\phi - \varphi_2), \tag{19}$$

$$x_2(t) \;=\; \mathrm{Im}w(t) = |c_1|\sin(\omega_0 t - \omega t\sin\phi + \varphi_1) - |c_2|\sin(\omega_0 t + \omega t\sin\phi - \varphi_2), \tag{20}$$

wobei $c_{1,2} = |c_{1,2}|e^{i\varphi_{1,2}}$ durch Anfangsbedingungen bestimmt werden.

(c). Der Faktor $e^{-i\omega\sin\phi}$ in Gl. (18) beschreibt die Drehung der Ebene der Pendelschwingung mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_3 = \omega\sin\phi = -\frac{2\pi}{24\ \mathrm{Std}}\sin\phi.$$

Karlsruhe:

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{Std}}\sin(49^o) \simeq \frac{2\pi}{(24\ \mathrm{Std})}0.755 = 360^o\frac{0.755}{24\ \mathrm{Std}} = 11.3^o \text{ pro Stunde.} \tag{21}$$

2. Drehmatrizen (6+6+8=20 Punkte)

Ein Zusammenhang zwischen den Komponenten von Vektoren in zwei Koordinatensystemen ist durch eine Matrixtransformation der Koordinaten

$$\vec{x}' = D\vec{x} \quad \text{oder} \quad x_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}x_j$$

gegeben. Eine beliebige Drehmatrix D kann wie folgt durch die eulerschen Winkel parametrisiert werden: $D(\varphi,\theta,\psi) = D(\hat{z},\psi)D(\hat{x},\theta)D(\hat{z},\varphi)$, wobei

$$D(\hat{z},\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\hat{x},\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

die Drehung um die z- bzw. x-Achse beschreiben.

(a) Finden Sie durch explizite Matrixmultiplikation die Drehmatrix $D(\varphi,\theta,\psi)$. Berechnen Sie $D^T(\varphi,\theta,\psi)D(\varphi,\theta,\psi)$ und $\det(D(\varphi,\theta,\psi))$.

(b) Finden Sie die Drehmatrix $D(\hat{y},\alpha)$ für eine Drehung um einen Winkel α um die y-Achse im raumfesten Koordinatensystem. Finden Sie die eulerschen Winkel für $D(\hat{y},\alpha)$. Bestimmen Sie $D^T(\hat{y},\alpha)D(\hat{y},\alpha)$ und $\det(D(\hat{y},\alpha))$.

(c) Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\omega_i = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_i$ im körperfesten Koordinatsystem sind durch die eulerschen Winkel $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ als

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\omega_1 = \sum_j D_{3j} \dot{D}_{2j}, \quad \omega_2 = \sum_j D_{1j} \dot{D}_{3j}, \quad \omega_3 = \sum_j D_{2j} \dot{D}_{1j}$$

gelten, wobei $D_{ik}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ die Komponenten der Drehmatrix sind.

Lösung:

(a). Das Produkt der Matrizen $D(\varphi, \theta, \psi) = D(\hat{z}, \psi) D(\hat{x}, \theta) D(\hat{z}, \varphi)$ lautet ausgeschrieben

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt als Zwischenschritt

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{array}\right). \tag{22}$$

Nun schreiben wir

$$D^T(\varphi, \theta, \psi) = D^T(\hat{z}, \varphi) D^T(\hat{x}, \theta) D^T(\hat{z}, \psi)$$

und dann

$$D^T(\varphi, \theta, \psi) D(\varphi, \theta, \psi) = D^T(\hat{z}, \varphi) D^T(\hat{x}, \theta) D^T(\hat{z}, \psi) D(\hat{z}, \psi) D(\hat{x}, \theta) D(\hat{z}, \varphi).$$

Zunächst berechnen wir explizit

$$\begin{aligned} D^T(\hat{z}, \psi) D(\hat{z}, \psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\psi + \sin^2\psi & \cos\psi\sin\psi - \sin\psi\cos\psi & 0 \\ \sin\psi\cos\psi - \cos\psi\sin\psi & \sin^2\psi + \cos^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{I} \end{aligned} \tag{23}$$

und

$$
\begin{aligned}
D^T(\hat{x},\theta)D(\hat{x},\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir $D^T D = \hat{I}$:

$$
\begin{aligned}
D^T(\varphi,\theta,\psi)D(\varphi,\theta,\psi) &= D^T(\hat{z},\varphi)D^T(\hat{x},\theta)\underbrace{D^T(\hat{z},\psi)D(\hat{z},\psi)}_{\text{Gl. (23): } \hat{I}}D(\hat{x},\theta)D(\hat{z},\varphi) \\
&= D^T(\hat{z},\varphi)\underbrace{D^T(\hat{x},\theta)D(\hat{x},\theta)}_{\text{Gl. (24): } \hat{I}}D(\hat{z},\varphi) = \underbrace{D^T(\hat{z},\varphi)D(\hat{z},\varphi)}_{\text{Gl. (23): } \hat{I}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Mit dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt

$$1 = \det(\hat{I}) = \det(D^T D) = \det(D^T)\det(D) = (\det(D))^2$$

und damit muss

$$\det(D) = \pm 1$$

gelten.

Explizit:

$$\det(D(\varphi,\theta,\psi)) = \det(D(\hat{z},\psi))\det(D(\hat{x},\theta))\det(D(\hat{z},\varphi)), \qquad (26)$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\det(D(\hat{z},\psi)) &= \cos^2\psi - (-\sin\psi)\sin\psi = 1 = \det(D(\hat{z},\varphi)), \qquad (27) \\
\det(D(\hat{x},\theta)) &= \cos^2\theta - (-\sin\theta)\sin\theta = 1. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$\det(D(\varphi,\theta,\psi)) = +1. \qquad (29)$$

Man nennt die Menge der Drehmatrizen (orthogonalen Matrizen mit Determinante +1) die *spezielle orthogonale Gruppe* SO(3).

(b). Ein positiver Winkel α beschreibt eine rechtshändige Drehung um die y-Achse. Die Transformation bei der Drehung lautet also

$$\hat{e}'_z = \hat{e}_z\cos\alpha + \hat{e}_x\sin\alpha, \qquad \hat{e}'_x = -\hat{e}_z\sin\alpha + \hat{e}_x\cos\alpha$$

und entsprechende Matrix

$$D(\hat{y},\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis von Aufgabe 2(a), Gl. (22), zeigt, dass die Drehung um die y-Achse durch folgende Euler-Winkel erreicht wird $\varphi = \pi/2$, $\theta = \alpha$, und $\psi = -\pi/2$:

$$D(\hat{y},\alpha) = D(\pi/2, \alpha, -\pi/2).$$

Es folgt damit:

$$D^T(\hat{y},\alpha)D(\hat{y},\alpha) \overbrace{=}^{\text{Gl. (25)}} \hat{I} \tag{31}$$

und

$$\det(D(\hat{y},\alpha)) \overbrace{=}^{\text{Gl. (29)}} +1. \tag{32}$$

(c). Wir berechnen $\omega_1 = \sum_j D_{3j}\dot{D}_{2j}$. Dazu brauchen wir

$$\begin{pmatrix} D_{31} \\ D_{32} \\ D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \dot{\phi}\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \dot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\psi\cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\sin\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Multiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\phi}\,[\sin\theta\sin\varphi\,(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\theta\cos\psi) \\
&+ \sin\theta\cos\varphi\,(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)] \\
&+ \dot{\theta}[\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\theta\cos\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\theta] \\
&+ \dot{\psi}[\sin\theta\sin\varphi(-\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\theta\sin\psi) \\
&+ \sin\theta\cos\varphi(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) - \cos\theta\sin\psi\sin\theta].
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\phi}[\sin\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin\psi] \\
&+ \dot{\theta}[\sin\theta^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos\psi + \cos^2\theta\cos\psi] \\
&+ \dot{\psi}[\sin\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos\theta\sin\psi - \sin\theta\cos\theta\sin\psi] \\
&= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi. \tag{33}$$

Wir berechnen nun $\omega_2 = \sum_j D_{1j} \dot{D}_{3j}$. Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_{31} \\ D_{32} \\ D_{33} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\phi}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \dot{\phi}[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi)\cos\varphi\sin\theta \\ &+ (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi)\sin\varphi\sin\theta] \\ &+ \dot{\theta}[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi)\sin\varphi\cos\theta \\ &- (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi)\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta\sin\psi\sin\theta] \\ &= \dot{\phi}[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos\psi\sin\theta] - \dot{\theta}[(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos^2\theta\sin\psi + \sin^2\theta\sin\psi] \end{aligned}$$

und damit

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi. \tag{34}$$

Schließlich berechnen wir $\omega_3 = \sum_j D_{2j}\dot{D}_{1j}$. Wir nutzen

$$\begin{pmatrix} D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi \end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\phi\,[(-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)\,(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) \\
&\quad + (-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi)\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi)] \\
&+ \dot\theta[-(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)\sin\varphi\sin\theta\sin\psi \\
&\quad +(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\theta\cos\psi)\cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\theta\cos\theta\sin\psi] \\
&+ \dot\psi[(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi) \\
&\quad +(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\theta\cos\psi)(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\theta\cos\psi) \\
&\quad + \cos\psi\sin\theta\sin\theta\cos\psi] \\
&= \dot\phi[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(\sin^2\psi + \cos^2\psi)\cos\theta] \\
&+ \dot\theta[-(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin\theta\cos\theta\cos\psi\sin\psi + \sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi] \\
&+ \dot\psi[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(\sin^2\psi + \cos^2\theta\cos^2\psi) + \sin^2\theta\cos^2\psi] \\
&= \dot\phi\cos\theta + \dot\psi(\sin^2\psi + \cos^2\psi) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\omega_3 = \dot\psi + \dot\phi\cos\theta. \tag{35}$$