Klassische Theoretische Physik II (Theorie B)   Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

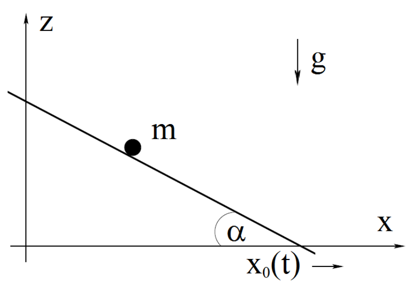
Probeklausur
19.07.2016

---

1. Beschleunigte schiefe Ebene

(2+2+4=8 Bonuspunkte)

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m, welcher sich auf einer schiefen Ebene befindet. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse. Die schiefe Ebene habe einen konstanten Neigungswinkel α gegenüber der Horizontalen und werde in positive x-Richtung mit konstanter Beschleunigung a beschleunigt, d.h. $x_0(t) = at^2/2$ (s. Abbildung).



(a) Finden Sie die zugehörige Zwangsbedingung $A(x, z, t)$.

Lösung:

Es gilt

$$\frac{z}{x_0(t) - x} = \tan\alpha$$

und damit lautet die Zwangsbedingung

$$A(x, z, t) = z\cos\alpha - [x_0(t) - x]\sin\alpha = 0.$$

(b) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.

Lösung:

Zwangskraft:

$$\vec{Z} = \lambda(t)\vec{\nabla}A(x, z, t) = \lambda(t)(\hat{e}_x \sin\alpha + \hat{e}_z \cos\alpha).$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_g + \vec{Z} = -mg\hat{e}_z + \lambda(t)\vec{\nabla}A(x, z, t) \;\Rightarrow \\ m\ddot{x} &= \lambda \sin\alpha, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda\cos\alpha. \end{aligned}$$

Dies wird ergänzt durch die Bedingung $A(x, z, t) = 0$:

$$z\cos\alpha = [x_0(t) - x]\sin\alpha.$$

(c) Bestimmen Sie aus diesen Gleichungen den Wert der Beschleunigung $a_c = a_c(\alpha)$, so dass der Massenpunkt auf der schiefen Ebene in Ruhe bleibt?

Lösung:

Elimination von λ ergibt:

$$\ddot{x}\cos\alpha - \ddot{z}\sin\alpha = g\sin\alpha. \qquad (*)$$

Damit der Massenpunkt in Ruhe bleibt, muss

$$\ddot{z} = 0$$

gelten (er darf also keine Beschleunigung erfahren). Aus der zweifach zeitlich abgeleiteten Zwangsbedingung

$$\ddot{z}(t)\cos\alpha - [a - \ddot{x}(t)]\sin\alpha = 0$$

erhält man die Bedingung

$$(a - \ddot{x})\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a_c = \ddot{x}.$$

Einsetzen dieser Bedingung in Gl. (*) liefert das Ergebnis:

$$a_c(\alpha) = g\tan\alpha.$$

2. Sphärischer Oszillator (5+4+6=15 Bonuspunkte)

Betrachten Sie einen sphärischen Oszillator, d.h. ein Teilchen der Masse m in drei Raumdimensionen im parabolischen Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2.$$

(a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Oszillators in kartesischen Koordinaten auf. Benutzen Sie dann eine der Erhaltungsgrößen (nicht die Energie) um die Anzahl der Freiheitsgrade der Lagrangefunktion zu reduzieren.

Lösung:

Lagrangefunktion:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Erhaltungsgrößen: die Energie E (das Potential ist zeitunabhängig) und der Drehimpuls $\vec{L}$ (Rotationsymmetrie).

Weil $\vec{L}$ erhalten ist, bewegt sich das Teilchen in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Wählt man die z-Richtung parallel zu $\vec{L}$, so liegt $\vec{r}$ immer in der xy-Ebene, ebenso wie $\dot{\vec{r}}$. Damit lautet die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten

$$L(x, y) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen an. Bestimmen Sie die Bahnkurve des Teilchens im Allgemeinen.

Lösung:

Bewegungsgleichungen ($\vec{L}$ parallel zu $\hat{e}_z$):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Deren allgemeine Lösung ist durch

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \quad y = b\cos(\omega t + \beta)$$

mit vier Konstanten a, α, b, β, gegeben. Im Allgemeinen ist die Bahnkurve also eine Ellipse.

(c) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion des Oszillators und die entsprechenden kanonischen Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten auf.

Lösung:

Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten:

$$L(r,\theta,\phi,\dot r,\dot\theta,\dot\phi) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\phi^2) - \frac{m}{2}\omega^2 r^2.$$

Verallgemeinerte Impulse:

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \Rightarrow \quad \dot r = \frac{p_r}{m},\\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2},\\
p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mr^2\sin^2\theta\dot\phi \quad \Rightarrow \quad \dot\phi = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned}
H &= \dot r p_r + \dot\theta p_\theta + \dot\phi p_\phi - L\\
&= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^\theta}\\
&- \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right] + \frac{m}{2}\omega^2 r^2\\
&= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{m}{2}\omega^2 r^2.
\end{aligned}$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot r &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m},\\
\dot{p_r} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{m\sin^2\theta r^3} - m\omega^2 r,\\
\dot\theta &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},\\
\dot{p_\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2}{m\sin^2\theta r^2}\cot\theta,\\
\dot\phi &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\sin^2\theta r^2},\\
\dot{p_\phi} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.
\end{aligned}$$

3. Scheibe und Klebertropfen (7 Bonuspunkte)

Eine dünne horizontale homogene Scheibe mit Masse M und Radius R kann sich reibungsfrei um ihre (vertikale) Achse drehen. Zunächst hat sie die Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Klebertropfen der Masse $m = M/10$ fällt vertikal auf die Scheibe im Abstand $r = 3R/4$ von der Achse und bleibt kleben. Finden Sie die neue Winkelgeschwindigkeit der Scheibe. Welchen Erhaltungssatz haben Sie benutzt?

Lösung:

Trägheitsmoment der Scheibe:

$$\Theta_S = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \int_0^R R dR R^2 = \frac{1}{2} M R^2.$$

Klebertropfen:

$$\Theta_K = m r^2 = \frac{M}{10} \left(\frac{3R}{4} \right)^2 = \frac{9}{160} M R^2.$$

Drehimpulserhaltung:

$$\omega \Theta_S = \omega' (\Theta_S + \Theta_K) \;\Rightarrow$$

$$\omega' = \omega \frac{\Theta_S}{\Theta_S + \Theta_K} = \omega \frac{1/2}{1/2 + 9/160} = \frac{80}{89} \omega \simeq 0.9 \omega.$$