Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik)** **SS 17**

**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
**PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier**

**Musterlösung zu Blatt 1**
**Besprechung: 28.04.2017**

---

## Mathematische Grundlagen

### 1. Stirlingsche Formel (Hausaufgabe): (5+5+5=15 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad N \gg 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $N!$ über die Gammafunktion

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty dx\, x^N\, e^{-x} \tag{2}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - N$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.

**Lösung:**

$$N! = \int_0^\infty dx x^N e^{-x} = \int_0^\infty dx \exp[\overbrace{N\ln x - x}^{f(x)}]$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{Exponenten:} & f(x) & = & N\ln x - x & \\ & f'(x) & = & N/x - 1 & \Rightarrow \text{ Extremum für } x = N \\ & f''(x) & = & -N/x^2 & \Rightarrow \text{ Maximum bei } x = N \end{array}$$

also

$$f(x) = f(N) + \frac{1}{2}f''(N)(x-N)^2 + \cdots = N\ln N - N - \frac{1}{2N}(\overbrace{x-N}^{\zeta})^2 + \ldots$$

Das Integral wird dominiert vom Beitrag beim Maximum des Exponenten.
Gaußsche Näherung für die Abweichung:

$$N! \approx e^{N\ln N - N}\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\frac{1}{2N}\zeta^2} = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

(b) Berechnen Sie die Näherung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3}$$

für den Fall $n \gg 1$ und $k = xn$ mit $0 < x < 1$.

**Lösung:**
Wir verwenden die Stirlingsche Formel für die Näherung des Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k!(n-k)!} &\approx \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi k}(k/e)^k\sqrt{2\pi(n-k)}[(n-k)/e]^{(n-k)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{k(n-k)}\right)^{1/2}\left(\frac{n}{n-k}\right)^n\left(\frac{n-k}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{nx(1-x)}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^n\left(\frac{1-x}{x}\right)^{xn} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\exp[nS_2(x)], \qquad (4)
\end{aligned}$$

$$S_2(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x). \qquad (5)$$

(c) Bei wie vielen Studenten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben, gerade größer als 99/100?

**Lösung:**
Die Anzahl aller möglichen Fälle ist für $n$ Personen $m = 365^n$, wobei alle Fälle gleich wahrscheinlich sind. Von diesen möglichen Fällen beinhalten

$$u = 365 \cdot 364 \cdots (365 - (n-1))$$

nur unterschiedliche Geburtstage. Für die erste Person kann der Geburtstag frei gewählt werden, für die zweite gibt es dann 364 Tage, an denen die erste nicht Geburtstag hat, etc. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{u}{m} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - (n-1))}{365^n},$$

dass alle $n$ Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag im Verlauf eines Jahres ist somit

$$P = 1 - \frac{u}{m} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - (n-1))}{365^n}.$$

Der Ausdruck für $P$ kann weiter umgeformt werden:

$$P = 1 - \frac{u}{m} = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}.$$

Mit der Stirlingschen Formel, $N! \approx \sqrt{2\pi N}\,(N/e)^N$ (Aufgabe 1a), lässt sich dies gut nähern zu

$$\begin{aligned}
P &\approx 1 - e^{-n}\left(\frac{365}{365-n}\right)^{365+1/2-n} \\
&= 1 - \exp\left[-\left(365 + \frac{1}{2} - n\right)\ln\left(1 - \frac{n}{365}\right) - n\right] \\
&\approx 1 - \exp\left[-\left(365 + \frac{1}{2} - n\right)\left(-\frac{n}{365} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{365}\right)^2\right) - n\right] \\
&\approx 1 - \exp\left[-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}\right]. \qquad (6)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{99}{100} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{100} = \exp\left[-\frac{n(n-1)}{2\cdot 365}\right] \\
n(n-1) &= 730 \cdot \ln 100 \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+2920\ln 100}\right) \simeq 58.6\ . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Für $n = 59$ ergibt sich:

$$
1 - \frac{365!}{306! \cdot 365^{59}} \approx 0.993 > 0.99.
$$

**2. Integrabilitätsbedingung:** (10 Bonuspunkte)

Eine Form

$$
\delta\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy
$$

heißt integrabel wenn eine Funktion $h(x,y)$ existiert, deren vollständiges Differential $dh$ identisch mit $\delta\omega$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_y
$$

erfüllt ist. Im Falle von nur zwei unabhängigen Variablen kann man immer einen integrierenden Faktor $\alpha(x,y) \neq 0$ finden, sodass die Form $\alpha\delta\omega$ integrabel ist.
Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy - y^2$ und $g(x,y) = -x^2 - 2xy + y^2$,

(b) $f(x,y) = 3x + y$ und $g(x,y) = -x - 3y$,

$\delta\omega$ integrabel ist, und bestimmen Sie $h(x,y)$. Finden Sie dazu im Falle einer nichtintegrablen Form einen geeigneten integrierenden Faktor $\alpha(x,y) = Ax + By$.

**Lösung:**

(a)

$$
\begin{aligned}
f &= 3x^2 - 2xy - y^2 & \qquad g &= -x^2 - 2xy + y^2 \\
\partial_y f &= -2x - 2y & \qquad \partial_x g &= -2x - 2y
\end{aligned}
$$

Also gilt: $\partial_y f = \partial_x g$, $\Rightarrow \omega$ ist integrabel.

Herleitung von $h(x,y)$:

1. Suche $F(x,y)$ mit $\partial_x F = f$
2. Bestimme $\varphi(y)$, so dass $\partial_y \varphi = g - \partial_y F$
3. $h(x,y) = F(x,y) + \varphi(y)$

Hier: $F(x,y) = x^3 - x^2 y - y^2 x \quad \Rightarrow \quad \partial_y F = -x^2 - 2xy$

$$
\partial_y \varphi = y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{1}{3}y^3
$$

$$
\Rightarrow \boxed{h(x,y) = x^3 - x^2 y - y^2 x + \frac{1}{3}y^3}
$$

(b)

$$f = 3x + y \;\Rightarrow\; \partial_y f = 1 \quad \text{und} \quad g = -x - 3y \;\Rightarrow\; \partial_x g = -1$$

Also

$$\partial_y f \neq \partial_x g, \quad \Rightarrow \quad \omega \; \underline{\text{ist nicht integrabel.}}$$

Suche integrierenden Faktor:

$$\partial_y(\alpha f) = f\partial_y\alpha + \alpha \overset{!}{=} \partial_x(\alpha g) = g\partial_x\alpha - \alpha \quad \longrightarrow \quad 3x\partial_y\alpha + y\partial_y\alpha + x\partial_x\alpha + 3y\partial_x\alpha + 2\alpha = 0$$

$$\alpha = Ax + By, \quad \partial_y\alpha = B, \quad \partial_x\alpha = A \quad \Rightarrow \quad (3x+y)B + (x+3y)A + 2Ax + 2By = 0$$

$$3B + 3A = 0, \quad A = -B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = x - y} \quad \text{(bis auf Vorfaktor).}$$

Suche $h$ mit $dh = (x-y)\omega$:

$$\left.\begin{array}{rcll} \partial_x F(x,y) &=& (x-y)f = (x-y)(3x+y) & \Rightarrow \; F(x,y) = x^3 - x^2y - xy^2 \\ \partial_y\varphi(y) &=& (x-y)(-x-3y) + x^2 + 2xy = 3y^2 & \Rightarrow \; \varphi(y) = y^3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x,y) = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3}$$

**3. Legendre-Transformation:** (5 + 5 = 10 Bonuspunkte)

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten $S$ und $U$ die Steigung $T = dU/dS$ sowie den $U$-Achsenabschnitt $F$ der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ wird als Legendre-Transformierte von $U(S)$ bezeichnet. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach $S$ definiert eine Funktion $S = S(T)$.

(a) Zeigen Sie, dass die vollständigen Differentiale von $U(S)$ und $F(T)$ durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

**Lösung:**

$U = U(S)$, Steigung

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \Rightarrow S = S(T) \qquad \boxed{dU(S) = \frac{\partial U}{\partial S}dS = T(S)dS}$$

$$F = F(T) = U\left(S(T)\right) - S(T)T,$$

$$dF(T) = \left[\overbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}^{T}\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial S}{\partial T}T - S(T)\right] dT \quad \Rightarrow \boxed{dF(T) = -S(T)dT}$$

(b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S,V)$ mit positiver Steigung bezüglich $S$, negativer Steigung bezüglich $V$ und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes $V$ bzw. für konstant gehaltenes $S$ durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S,V)$ nach $S$ und $P(S,V)$ nach $V$ definiert Funktionen $S(T,V)$ und $V(S,P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T,V)$ und $H(S,P)$.

**Lösung:**

Die Funktionen $U(S,V)$, $F(T,V)$ und $H(S,P)$ entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

$$U(S,V), \quad T = \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial S}\right|_V \quad \Rightarrow \quad S(T,V)$$

$$-P = \left.\frac{\partial U(S,V)}{\partial V}\right|_S \quad \Rightarrow \quad V(S,P)$$

$$dU(S,V) = T(S,V)dS - P(S,V)dV \quad \text{Innere Energie}$$

analog zu a):

$$F(T,V) = U(S(T,V),V) - S(T,V)T \qquad \text{Freie Energie,}$$
$$dF(T,V) = -S(T,V)dT - P(S,(T,V),V)dV$$

$$H(S,P) = U(S,V(S,P)) + V(S,P)P \qquad \text{Enthalpie,}$$
$$dH(S,P) = T(S,V(S,P))dS + V(S,P)dP$$

**4. Funktionaldeterminantenkalkül:** (10 + 8 + 12 = 30 Bonuspunkte)

Gegeben seien die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der unabhängigen Variablen $x$ und $y$. Als Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten:

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y , \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x , \tag{8}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} , \tag{9}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1} . \tag{10}$$

**Lösung:**

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_y \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_x - \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_y \qquad \text{Def. der Determinante}$$

$$v(x,y) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_x = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_y$$

$$u(x,y) = x \quad \Rightarrow \quad \text{analog} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_x$$

Die Beziehung

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}$$

folgt trivial aus Determinanteneigenschaft (Vertauschen von $u \leftrightarrow v$ oder $x \leftrightarrow y$ vertauscht Vorzeichen)

Nun stellen wir die Funktionen $u(s,t)$ and $v(s,t)$ mit Variablen $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ vor. Dann haben wir

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_y \equiv \frac{\partial u(s(x,y),t(x,y))}{\partial x}\bigg|_y = \frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_y \tag{11}$$

und analog für $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ and $\partial v/\partial y$.

Auf diese Weise erhält man die Kettenregel für Jacobi-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\big|_y & \frac{\partial u}{\partial y}\big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}\big|_y & \frac{\partial v}{\partial y}\big|_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}\big|_t & \frac{\partial u}{\partial t}\big|_s \\ \frac{\partial v}{\partial s}\big|_t & \frac{\partial v}{\partial t}\big|_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x}\big|_y & \frac{\partial s}{\partial y}\big|_x \\ \frac{\partial t}{\partial x}\big|_y & \frac{\partial t}{\partial y}\big|_x \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial\left(u(s(x,y),t(x,y))\right), v(s(x,y),t(x,y))}{\partial(x,y)} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_y\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial s}{\partial y}\bigg|_x + \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_x\right) \\
&- \left(\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial s}{\partial y}\bigg|_x + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_x\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_y\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_t \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_s - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_s \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_t\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\bigg|_y \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_x - \frac{\partial s}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_y\right) \\
&= \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Durch Umbenennen von $x,y \to s,t$ und $s,t \to x,y$ folgt

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \quad \overset{\text{auflösen}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right]^{-1}$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen $x$ und $y$ durch

$$\phi(x,y) = \text{const}$$

gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1}, \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1}. \tag{14}$$

**Lösung:**
Die erste Relation spiegelt einfach den Satz der lokalen Umkehrbarkeit aus Analysis wieder. Z.B. so: Sei $\phi(x,y) = \text{const.}$, also $x(y)$. Dann ist das Differential

$$dx(y) = \frac{\partial x}{\partial y} dy.$$

Andererseits ist aber

$$dy(x) = \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Einsetzen liefert dann

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

also

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Und daraus folgt schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1} .$$

Da wir ja von Anfang an $\phi = \text{const.}$ angenommen haben, dürfen wir auch noch bei beiden partiellen Ableitungen die $\phi$'s dazuschreiben und erhalten das gesuchte Resultat:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(x,\phi)} = \frac{\partial(y,\phi)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(x,\phi)} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left[\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(x,y)}\right]^{-1} = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x\right)^{-1}$$

Hier wird $\phi = \phi(x,y) =$const. als unabhängige Variable aufgefasst, d. h. $y = y(x,\phi)$.

(c) Betrachten Sie nun die drei Variablen $x$, $y$ und $z$, die durch die Bedingung

$$F(x,y,z) = 0$$

miteinander in Zusammenhang stehen. Durch Auflösen der Gleichung $F = 0$ nach $x$, $y$ und $z$ erhalten wir die drei Funktionen $x(y,z)$, $y(x,z)$ und $z(x,y)$. Nehmen Sie weiter an, dass es einen funktionalen Zusammenhang $w = w(x,y)$ gibt. Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktionen folgende Relationen erfüllen:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -1, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z. \tag{17}$$

**Lösung:**
Wir betrachten $x$ und $z$ als unabhängige Variable, so dass $y = y(x,z)$. Das erfolgt durch Auflösen von $F(x,y,z) = 0$ nach $y$. Das Differenzial für $y$ ist dann

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_z dx + \frac{\partial y}{\partial z}\bigg|_x dz$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_z \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial x}{\partial z}\bigg|_y &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} = -\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} \\ &= -\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(z,y)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(z,y)} = -1. \quad (18)\end{aligned}$$

Weiterhin ist $w = w(x,y)$, also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y dx + \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x dy.$$

Wir substituieren $y(x,z)$ für $y$ in $w(x,y)$, und erhalten als Differenzial für $w(x,z)$:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial y}{\partial z}\bigg|_x dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_z\right) dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_z = \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_z. \quad (19)$$

Analog erhalten wir aus dem Differenzial für $w(x(y,z),y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_z = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x + \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y \frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_z. \quad (20)$$

Wir eliminieren $\partial w/\partial y|_x$ (d.h. Gl. (20) in Gl. (19) einsetzen), und erhalten

$$\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_z = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_z \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_z.$$

Wir lösen nun $w = w(x,y)$ nach $x$ auf, betrachten also $x$ als Funktion von $y$ und $w$, d.h. $x = x(y,w)$. Wir erhalten

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_w dy + \frac{\partial x}{\partial w}\bigg|_y dw$$

Dir Gleichung $F(x,y,z) = 0$ lösen wir nach $x$ auf, betrachten also $x$ als Funktion von $y$ und $z$, und erhalten daraus $w = w(x(y,z),y)$. Das Differential für $w(y,z)$ ist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_z dy + \frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_y dz.$$

Wir substituieren dies in die Gleichung für $dx$ und erhalten schließlich

$$\frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_z = \frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_w + \frac{\partial x}{\partial w}\bigg|_y \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_z.$$