Moderne Theoretische Physik III (Theorie F – Statistische Mechanik) SS 17

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Janina Klier

Musterlösung: Blatt 8
Besprechung: 16.06.2017

---

1. Bose-Gas in der Nähe der Kondensationstemperatur: (10+10=20 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Bose-Gas bei festgehaltener Dichte n in drei räumlichen Dimensionen. Das Bose-Gas kondensiert zu einem Bose-Einstein-Kondensat bei kritischer Temperatur $T_c(n)$.

(a) Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ bei Temperaturen in der Nähe der Kondensationstemperatur: $0 < T - T_c(n) \ll T_c(n)$. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass für $0 < 1 - z \ll 1$ gilt: $g_{3/2}(z) = \sum_k \frac{z^k}{k^{3/2}} \simeq g_{3/2}(1) - 2\sqrt{\pi(1-z)}$.

Lösung:

Unser Startpunkt ist die folgende Gleichung aus der Vorlesung

$$n = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_T^3}, \tag{1}$$

wobei

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}, \qquad z = e^{\mu/k_BT}. \tag{2}$$

Wir benutzen zunächst

$$g_{3/2}(z) \approx g_{3/2}(1) - 2\sqrt{\pi(1-z)} \tag{3}$$

und lösen die Gleichung für das chemische Potential $\mu(T)$. Wir werden Gl. (3) später beweisen.

Wir führen die Notation

$$\delta T = T - T_c(n), \qquad \delta z = 1 - z \approx -\frac{\mu}{k_BT_c(n)}, \qquad \lambda_c = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT_c(n)}} \tag{4}$$

ein.

Wir entwickeln in der Nähe von $T = T_c(n)$

$$n = \frac{1}{\lambda_c^3} g_{3/2}(1) + \frac{1}{\lambda_c^3}\frac{3}{2}\frac{\delta T}{T_c}\, g_{3/2}(1) - \frac{1}{\lambda_c^3}\, 2\sqrt{\pi\delta z} \tag{5}$$

und benutzen die Definition der kritischen Temperatur

$$n = \frac{1}{\lambda_c^3} g_{3/2}(1). \tag{6}$$

Wir finden

$$\delta z = \frac{9}{16\pi} g_{3/2}^2(1) \left(\frac{\delta T}{T_c}\right)^2. \tag{7}$$

Schließlich,

$$\mu = -\frac{9k_B}{16\pi} \frac{(T - T_c)^2}{T_c} g_{3/2}^2(1). \tag{8}$$

Wir beweisen nun Gl. (3). Es ist nützlich zuerst die Integraldarstellung von $g_{3/2}(z)$ zu zeigen. Diese lautet

$$g_{3/2}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-kx^2/2} = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left[1 - e^{-x^2/2} z\right] \tag{9}$$

Daraus erhalten wir für die Differenz von $g_{3/2}(z) - g_{3/2}(1)$ folgendes

$$g_{3/2}(z) - g_{3/2}(1) = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{\delta z}{e^{x^2/2} - 1}\right) \tag{10}$$

Lasst uns dieses Integral im Detail betrachen. Wenn wir versuchen es in δz zu entwickeln, erhalten wir sofort eine Divergenz für kleine x. Dies zeigt uns, dass die Antwort sich wie $\sqrt{\delta z}$ verhält und das nicht analytische Verhalten aus Werten für kleine x entsteht. Wir können daher den Ausdruck für unter dem Integral für kleine x entwickeln und erhalten

$$g_{3/2}(z) - g_{3/2}(1) = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{2\delta z}{x^2}\right) = -2\sqrt{\pi \delta z} \tag{11}$$

(b) Die Ableitung

$$c'(T) = \left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{V,N}$$

hat bei T_c einen Sprung $\Delta c' = c'(T_c + 0) - c'(T_c - 0)$. Berechnen Sie $\Delta c'$.

Lösung:

Vorlesung:

$$T < T_c: \quad \mu = 0, \quad S = \frac{5k_B k_B}{2\lambda_T^3} g_{5/2}(1), \tag{12}$$

$$c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{3}{2} S = \frac{15 k_B V}{4\lambda_T^3} g_{5/2}(1), \tag{13}$$

$$T > T_c: \quad \mu = \mu(n, T), \quad U = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z), \quad z(n, T) = e^{\frac{\mu(n,T)}{k_B T}}, \tag{14}$$

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{15 k_B V}{4\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{3V}{2\lambda_T^3} \frac{\mu}{T} g_{3/2}(z) + \frac{3V}{2\lambda_T^3} \frac{\partial \mu}{\partial T} g_{3/2}(z). \tag{15}$$

Mit

$$\mu(T) \simeq -\frac{9k_B}{16\pi} \frac{(T - T_c)^2}{T_c} g_{3/2}^2(1)$$

aus 1(a) erhalten wir für $T = T_c + 0$

$$\left.\frac{\mu}{T}\right|_{T\to T_c} \propto \frac{(T-T_c)^2}{T_c^2} \to 0, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial T}\right|_{T\to T_c} \propto \frac{(T-T_c)}{T_c} \to 0, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right|_{T\to T_c} = -\frac{9k_B}{8\pi T_c} g_{3/2}^2(1). \tag{18}$$

Aus diesen Relationen folgt, dass wir für die Berechnung des Sprungs der Wärmekapazität nur Terme, die die 2. Ableitung des chemischen Potentials nach der Temperatur enthalten, da die restlichen Terme verschwinden. Damit folgt:

$$\Delta c' = \left.\frac{3V}{2\lambda_T^3}\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2} g_{3/2}(z)\right|_{T\to T_c} = -\frac{27}{16\pi} g_{3/2}^2(1)\frac{k_B V n}{T_c}. \tag{19}$$

2. Strahlungsdruck: (10 Punkte)

In einen Hohlraum wird ein Körper eingebracht. Über Absorption und Wärmestrahlung bei der Temperatur T stellt sich ein Gleichgewicht zwischen dem Körper und den Photonen ein. Jedes Photon, das auf den Körper auftrifft, wird von dem Körper absorbiert ("idealer schwarzer Körper") und überträgt seinen Impuls $\vec{p}$ auf ihn. Finden Sie den mittleren Impuls pro Flächenelement, der durch die absorbierten Photonen auf den Körper im Zeitinterval dt übertragen wird. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Strahlungsdruck P aus der Vorlesung.

Lösung:

Die Anzahl der Photonen mit dem totalen Wert für den Impuls in $(k, k+dk)$ und dem Winkel zwischen dem Impuls und der z-Achse in $(\theta, \theta+d\theta)$ ist

$$2\times 2\pi\sin\theta d\theta k^2 dk \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{e^{\beta ck}-1} \tag{20}$$

Für solch ein Photon ist die Geschwindigkeit $v_z = c\cos\theta$ und der Impuls k_z ist $k\cos\theta$. Daher ist der Impuls, der durch das Oberflächenelemet $d\mathcal{S}$ der Wand übertragen wird, gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta p_z &= d\mathcal{S}dt\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty dk\left(2\times 2\pi\sin\theta k^2\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{e^{\beta ck}-1}\right)\times c\cos\theta\times k\cos\theta\\ &= \frac{d\mathcal{S}dtc}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^\infty dk k^3\frac{1}{e^{\beta ck}-1} = \frac{d\mathcal{S}dt}{2\pi^2\hbar^3 c}\times\frac{1}{3}\times\frac{k_B^4T^4}{c^4}\int_0^\infty dk\frac{k^3}{e^k-1}\\ &= \frac{d\mathcal{S}dt}{2\pi^2\hbar^3}\times\frac{1}{3}\times\frac{k_B^4T^4}{c^4}\frac{\pi^4}{15} = d\mathcal{S}dt\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{45}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}.\end{aligned} \tag{21}$$

Hier benutzen wir das Integral aus Aufgabe 3(a).

Wir bemerken, dass dies genau die Hälfte der Antwort ist, die wir aus dem Ausdruck des Strahlungdruckes erwarten würden

$$P = \frac{\pi^2}{45}\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}. \tag{22}$$

Der Grund ist, dass ein schwarzer Körper nicht nur Photonen absorbiert sondern auch emittiert. Daher kommt die zweite Hälfte das Strahlungsdruckes.

3. Phononen: (7+7+6=20 Punkte)

(a) In dem Debye-Modell wird das Spektrum der akustischen Zweige $\omega_{k\sigma} = ck$ bei einer gewissen endlichen Frequenz ω_D abgebrochen. Berechnen Sie die Wärmekapazität der Phononen für das Debye-Modell in drei räumlichen Dimensionen (Polarization $\sigma = 1, 2, 3$) bei tiefen Temperaturen, $T \ll \Theta_D$, wobei $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ Debye-Temperatur ist. *Hinweis:* $\int_0^\infty dx x^3/(e^x - 1) = \pi^4/15$.

Lösung:

Wir betrachten die Innere Energie. Die Grundzustandsenergie ist

$$U_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar\omega_{\vec{k},\sigma}}{2}.$$

Es gilt dann also

$$\begin{aligned}
U - U_0 &= \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar ck}{e^{\beta\hbar ck} - 1} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_\sigma \int d^3k \frac{\hbar c|k|}{e^{\beta\hbar ck} - 1} \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_\sigma \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty d^3x \frac{x}{e^x - 1} \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} 3 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} 4\pi \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} 3 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} 4\pi \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2}{10} \frac{V}{(\hbar c)^3} (k_B T)^4
\end{aligned}$$

Damit finden wir schließlich für die spezifische Wärme

$$c_V = \frac{2}{5} V \pi^2 k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \propto T^3 .$$

(b) Zeigen Sie, dass im Limes hoher Temperaturen $T \gg \Theta_D$ die klassischen Resultate für die innere Energie (Gleichverteilungssatz) und die Wärmekapazität (Dulong-Petit-Gesetz) gelten.

Lösung:

Die Zustandssumme der unterscheidbaren Oszillatoren ($\mu = 0$) lautet:

$$Z = \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} = \prod_\lambda \left(\sum_{n_\lambda=0}^\infty e^{-\beta\hbar\omega_\lambda(n_\lambda+1/2)} \right) = \prod_\lambda \left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega_\lambda \frac{1}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_\lambda}} \right),$$

wobei $\lambda = \{\vec{k}, \sigma\}$.

Innere Energie:

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_\lambda \left[-\frac{\beta\hbar\omega_\lambda}{2} - \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega_\lambda}\right) \right].$$

Hochtemperaturlimes $k_B T \gg \hbar\omega_D \quad \Rightarrow \quad e^{\beta\hbar\omega_\lambda} \approx 1 + \beta\hbar\omega_\lambda$:

$$U=\sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{k_BT}{\hbar\omega_\lambda}\right)=\sum_\lambda k_BT\Big(1+\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega_\lambda}{k_BT}\Big)=3Nk_BT\Big[1+\mathcal{O}\Big(\underbrace{\frac{\hbar\omega_\lambda}{k_BT}}_{\ll 1}\Big)\Big],$$

wobei N die Anzahl von Atomen ist. In führender Ordnung ist dies genau der Gleichverteilungssatz, der besagt, dass jeder Freiheitsgrad, der quadratisch in der Hamilton-Funktion auftritt mit $(1/2)Nk_BT$ zur inneren Energie beiträgt.

Die Wärmekapazität erhält man durch Ableiten nach T und wir finden $c_V=3Nk_B$. (Dulong-Petit-Gesetz).

(c) Betrachten Sie nun einen Kristall in D räumlichen Dimensionen. Bestimmen Sie das führende Temperaturverhalten der Wärmekapazität der Phononen im Limes tiefer Temperaturen $T\to 0$. Die explizite Berechnung des T-unabhängigen Koeffizienten ist nicht gefordert.

Lösung:

Im Grenzfall von $T\to 0$ kommt der Hauptanteil der Wärmekapazität der Phononen von akustischen Phononen (der Anteil der optischen Phononen ist exponentiell unterdrückt). In D räumlichen Dimensionen gibt es D akustische Moden ($\sigma=1,\dots,D$). Diese tragen alle zum Tieftemperaturverhalten von c_V bei.

Das thermodynamische Potential (mit $\hat{k}=\vec{k}/|k|$) lautet:

$$\begin{aligned}\Omega&=-k_BT\ln Z_G=-k_BT\ln\left(\prod_\lambda Z_\lambda\right)=-k_BT\sum_\lambda\ln\left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega_\lambda/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_\lambda}}\right)\\&=k_BT\sum_\sigma V\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\ln\Big[1-e^{-\beta c_\sigma(\hat{k})|k|}\Big]+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_\sigma V\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}c_\sigma(\hat{k})|k|}_{\Omega_0=\mathrm{konst}(T)}\\&\underbrace{=}_{\tilde{k}=\beta|k|}(k_BT)^{D+1}\sum_\sigma V\int_0^\infty\frac{\tilde{k}^{D-1}d\tilde{k}}{(2\pi)^D}\int d\hat{k}\ln\Big[1-e^{-c_\sigma(\hat{k})\tilde{k}}\Big]+\Omega_0.\end{aligned}\tag{23}$$

Daraus folgt:

$$c_V=-T\frac{\partial^2\Omega}{\partial T^2}\propto T^D.\tag{24}$$