Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 1
Lösungsvorschlag

---

1. Das ideale Bose-Gas in der Nähe der kritischen Temperatur:

Wir berechnen die Teilchenzahl

$$N = \sum_{\boldsymbol{k}} n_B(\epsilon_{\boldsymbol{k}}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{e^{(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)/T} - 1},$$

und auflösen mach μ.

In der Nähe der kritischen Temperatur $T \sim T_c$ ist die Anzahl der Bosonen im Grundzustand klein, sie wird hier vernachlässigt. Wir können deshalb direkt die Integraldarstellung verwenden:

$$n = \frac{N}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\mu)/T} - 1} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} = \frac{(mT)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{e^{z-\mu/T} - 1}.$$

Am Phasenübergang bei T_c ist $\mu = 0$, oberhalb von T_c wird $\mu < 0$, ist aber immernoch klein, es bietet sich also an, $n(\mu)$ in kleinem μ zu entwickeln. Leider funktioniert eine naive Entwicklung um $\mu = 0$ nicht, weil man divergente Integrale erhält. Das Problem kann auf zwei Arten gelöst werden: entweder man integriert und erhält eine Darstellung $N \propto g_{3/2}(e^{\mu/T})$, die man dann in kleinen μ entwickeln kann; oder man macht eine Abschätzung des Integrals für kleine μ.

Lösung 1

Das Integral für die Teilchendichte ergibt

$$n = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda_T^3}, \qquad z = e^{\mu/T}, \quad \lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi}{mT}}.$$

Eine Reihenentwicklung für $g_{3/2}(z)$ kann man entweder in der Mathe-Bücher finden,

$$g_{3/2}(z) = \mathrm{Li}_{3/2}(z) \quad \Rightarrow \quad g_{3/2}\left(e^{\mu/T}\right) \approx \Gamma(-1/2)\sqrt{-\mu/T} + \zeta(3/2) + \zeta(1/2)\mu/2 + \mathcal{O}(\mu^2),$$

oder selbst berechnen:

$$g_{3/2}(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-nx^2/2} = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 - ze^{-x^2/2}\right),$$

sodass

$$g_{3/2}(z) - g_{3/2}(1) = -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{\delta z}{e^{x^2/2} - 1}\right) \approx -\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(1 + \frac{2\delta z}{x^2}\right) = -2\sqrt{\pi\delta z}.$$

Jetzt können wir die Teilchendichte um $T = T_c$ entwickeln:

$$n = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_c^3} + \frac{3g_{3/2}(1)}{2\lambda_c^3}\frac{\delta T}{T_c} - \frac{2\sqrt{\pi\delta z}}{\lambda_c^3},$$

wobei

$$\lambda_c = \lambda_{T_c} = \sqrt{\frac{2\pi}{mT_c(n)}}, \qquad \delta T = T - T_c(n), \qquad \delta z = 1 - z \approx \frac{\mu}{T_c(n)}.$$

Am Phasenübergang $T = T_c$ gilt $n = n(T_c)$ und zwar

$$n = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_c^3}.$$

Es folgt

$$\delta z = \frac{9}{16\pi}\left[g_{3/2}(1)\frac{\delta T}{T_c}\right]^2 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{9}{16\pi}\frac{(T-T_c)^2}{T_c}g_{3/2}^2(1).$$

Lösung 2

Wir führen $n_0(T)$ ein als die Teilchenzahl, die das System im Gleichgewicht bei $T > T_c$ hätte, wenn weiterhin $\mu = 0$ wäre

$$n_0(T) = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_T^3}.$$

Am Phasenübergang $T = T_c$ gilt $n = n(T_c)$ und zwar

$$n_0(T) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} n, \qquad T_c = \frac{2\pi}{m}\left(\frac{n}{g_{3/2}(1)}\right)^{2/3}.$$

Die Teilchenzahl n können wir jetzt mit n_0 schreiben als

$$n = n_0(T) + \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2}\int_0^\infty d\epsilon\sqrt{\epsilon}\left[\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/T}-1} - \frac{1}{e^{\epsilon/T}-1}\right].$$

Da $n_0(T)$ für $T > T_c$ anwächst, aber n konstant ist, stellt sich μ so ein, dass der zweite Term im obigen Integral das Wachstum von n_0 kompensiert. In der Region $\epsilon \gg \mu$ ist die Differenz (und damit das Integarl) klein. Der Hauptbeitrag zum Integral kommt deshalb aus kleinen $\epsilon \sim \mu \ll T$. Wir entwickeln dann die Exponentialfunktionen

$$\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/T}-1} - \frac{1}{e^{\epsilon/T}-1} \approx \frac{T}{\epsilon-\mu} - \frac{T}{\epsilon} = \frac{\mu T}{\epsilon(\epsilon+|\mu|)}.$$

Jetzt können wir das Integarl einschätzen als

$$\int_0^\infty d\epsilon\frac{\mu T}{\sqrt{\epsilon}(\epsilon+|\mu|)} = -\pi T\sqrt{|\mu|}.$$

Das können wir in die Teilchenzahl einsetzen und das Ergebniss nach μ auflösen:

$$\mu(T,V,N) = -\frac{2\pi^2}{m^3}\left(\frac{n_0(T)-n}{T}\right)^2.$$

In der Nähe von T_c ist das gleich als das Ergebniss der Lösung 1.

2. Bose-Einstein-Kondensation I:

Die Wärmekapazität ist als eine Ableitung der inneren Energie definiert:

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V.N}.$$

Die innere Energie ist (für spinnlosen Teilchen)

$$U = \sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_{\boldsymbol{k}} n_B(\epsilon_{\boldsymbol{k}}).$$

Da die Teilchen im Grundzustand ($\epsilon_{\boldsymbol{k}} = 0$) nicht beitragen, können wir die Summe als Integral berechnen

$$\frac{U}{V} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} = \frac{m^{3/2} T^{5/2}}{\sqrt{2}\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{z^{3/2} dz}{e^{z-\mu/T} - 1} = \frac{3T}{2\lambda_T^3} g_{5/2}(e^{\mu/T}),$$

wobei

$$g_{5/2}(z) = \mathrm{Li}_{5/2}(z), \qquad z = e^{\mu/T}.$$

Die Wärmekapazität ergibt sich zu

$$c_V = \begin{cases} (15/4)\lambda_T^{-3} g_{5/2}(1), & T < T_c, \\ (15/4)\lambda_T^{-3} g_{5/2}(z) - (3/2)\lambda_T^{-3}(\mu/T) g_{3/2}(z) + (3/2)\lambda_T^{-3}(\partial\mu/\partial T) g_{3/2}(z), & T > T_c. \end{cases}$$

Es gibt also einen Beitrag $\propto \partial\mu/\partial T$ zur Wärmekapazität. In der Ableitung $\partial c_V/\partial T$ gibt es weitere Beiträge dieser Art, die insbesondere für den Sprung $\Delta c'$ verantwortlich sind. Der Beitrag aus dem ersten Term wird durch einen identischen Beitrag aus $c_V(T < T_c)$ gekürzt. Der zweite Term verschwindet bei $T = T_c$ (wobei $\mu = 0$). Der einzige Term der zum Sprung beiträgt ist der, bei dem die T-Ableitung auf $\partial\mu/\partial T$ wirkt.

Wir erhalten bei $T = T_c$

$$\Delta c_V' = \frac{3}{2\lambda_T^3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} g_{3/2}(e^{\mu/T}) \bigg|_{T=T_c} = -\frac{27}{16\pi} g_{3/2}^2(1) \frac{n}{T_c} \approx -3.67 \frac{n}{T_c},$$

wobei wir das chemische Potential als Funktion der Temperatur, siehe Aufgabe 1, benutzt haben.

3. Bose-Einstein-Kondensation II:

Die Bose-Einstein-Kondensation enspricht eine Makroskopische Teilchenzahl im Grundzustand. Wenn die Gesamtteilchenzahl gegeben sei, können wir die kritische Temperatur finden als

$$N = \sum_\alpha \frac{1}{e^{\epsilon_\alpha/T_c} - 1} \quad \Rightarrow \quad T_c(N),$$

wobei ϵ_α sind die Einteilchenenergien (mit dem Nullpunkt im Grundzustand). Bei niedriger Temperaturen berechnen wir die Zahl der Teilchen, die nicht im Grundzustand sind (d.h. mit $\epsilon_\alpha > 0$), mithilfe der ahnlichen Summe mit $\mu = 0$:

$$N_{\epsilon>0} = \sum_\alpha \frac{1}{e^{\epsilon_\alpha/T} - 1} = \int \frac{\nu(\epsilon) d\epsilon}{e^{\epsilon/T} - 1},$$

wobei $\nu(\epsilon)$ die Zustandsdichte ist. Wenn das Integral konvergiert, dann haben wir für jede Temperatur eine bestimmten Zahl von Teilchen in alle Zustände mit $\epsilon > 0$. Wenn die Gesamtteilchenzahl größer als $N_{\epsilon>0}(T)$ ist, dann finden wir eine Makroskopische Teilchenzahl im Grundzustand. Wenn das Integral divergiert, ist dann die Bose-Einstein-Kondensation unmöglich.

(a) In einem harmonischen Potential sind die Einteilchenenergien

$$E_{nml} = \omega(n + m + l + 3/2).$$

Dann

$$N_{\epsilon>0} = \sum_{n+m+l\neq 0} \frac{1}{e^{\omega(n+m+l)/T} - 1}.$$

Die Summe konvergiert, d.h. finden wir eine T_c und die Bose-Einstein-Kondensation.

(b) Für ultrarelativistische Bosonen ist die Dispersionsrelation

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}} = ck.$$

Die Zustandsdichte ist dann

$$\nu(\epsilon) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\epsilon - ck) = \frac{\epsilon^2}{2\pi^2 c^3}.$$

Dann

$$N_{\epsilon>0} = \frac{1}{2\pi^2 c^3} \int \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\epsilon/T} - 1}.$$

Das Integral kovergiert, d.h. finden wir eine T_c und die Bose-Einstein-Kondensation.

(c) Für die Dispersionsrelation

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \alpha k^4,$$

ist die Zustandsdichte (in 2D)

$$\nu(\epsilon) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta(\epsilon - \alpha k^4) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\epsilon}}.$$

Hier ist das Integral für $N_{\epsilon>0}$ divergent, d.h. findet keine Bose-Einstein-Kondensation statt.