

Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 6
Lösungsvorschlag

1. Korrelationsfunktion der Fluktuationen im Ising-Modell:

Die Korrelationsfunktion ist definiert als

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \delta m(\mathbf{r}) \delta m(\mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{Z} \int [Dm] \delta m(\mathbf{r}) \delta m(\mathbf{r}') e^{-\mathcal{F}(m)/T}.$$

Das Landau-Funktional des Ising-Modells haben wir in Blatt 5 bestimmt. Hier benutzen wir die allgemeine Bezeichnung m als der Ordnungsparameter:

$$\mathcal{F}(m) = \frac{1}{2} \int d^d r \left[t m^2(\mathbf{r}) + K [\nabla m(\mathbf{r})]^2 + \frac{b}{2} m^4(\mathbf{r}) \right],$$

wobei wir für das Ising-Modell auf einem 3-dimensionalen Gitter mit Nächster Nachbar-Wechselwirkung die folgende Koeffizienten gefunden haben

$$t = 2g_0 a, \quad K = 2g_0 \xi_0^2, \quad b \rightarrow 4g_0 b,$$

wobei

$$g_0 = \frac{J_0}{NV}, \quad a = \frac{T - T_c}{T}, \quad T_c = \frac{2J_0}{k_B}, \quad \xi_0 = \frac{\bar{a} \sqrt{4\beta J_0 - 1}}{\sqrt{6}}, \quad b = \frac{2\beta^3 J_0^3}{3}.$$

Führen wir jetzt die Fluktuationen ein

$$m(\mathbf{r}) = m_0 + \delta m(\mathbf{r}),$$

mit dem Molekulärfeldwert $m_0 = |t|/b$. Das Landau-Funktional schreiben wir als

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \delta \mathcal{F},$$

mit dem linearisierten Beitrag der Fluktuationen

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int d^d r \left[t \delta m^2(\mathbf{r}) + K [\nabla \delta m(\mathbf{r})]^2 + 3b m_0^2 \delta m^2(\mathbf{r}) \right].$$

Verwenden wir jetzt die Fourier-Transformation

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} [A + K q^2] \delta m_q \delta m_{-q},$$

wobei $A = t + 3b m_0^2$.

Die Korrelationsfunktion wird nach der Fourier-Transformation

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q}_1 \mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}_2 \mathbf{r}'} \langle \delta m_{q_1} \delta m_{q_2} \rangle.$$

Hier

$$\langle \delta m_{q_1} \delta m_{q_2} \rangle = \frac{1}{Z} \int [Dm] \delta m_{q_1} \delta m_{q_2} e^{-\delta \mathcal{F}(\delta m)/T} = \delta_{q_1, -q_2} \frac{T}{A + K q_1^2}.$$

Letztendlich

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{T}{A + K q^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \propto e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\xi},$$

wobei

$$\xi = \sqrt{K/A}.$$

2. Mermin-Wagner-Theorem:

- (a) Wir wählen eine bestimmte Molekulärfeldlösung $\mathbf{m} = m_0 \mathbf{e}_x$ und betrachten die Fluktuationen

$$\mathbf{m} = (m_0 + \delta m_x \mathbf{e}_x) + \delta m_y \mathbf{e}_y.$$

Dann ist die freie Enthalpie (in "lineare Näherung")

$$G = G_0 + \frac{1}{2} \int d^d r [(t + 3bm_0^2) \delta m_x^2 + (t + bm_0^2) \delta m_y^2 + K [(\nabla \delta m_x)^2 + (\nabla \delta m_y)^2]].$$

For $T < T_c$ gilt $t + bm_0^2 = 0$. Dann finden wir nach der Fourier-Transformation:

$$G = G_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \{ [A + Kq^2] \delta m_x(q) \delta m_x(-q) + Kq^2 \delta m_y(q) \delta m_y(-q) \}.$$

Deswegen haben wir zwei Fluktuationsmoden. Die longitudinale Mode $\delta m_x(q)$ hat die Energielücke A , d.h. diese Mode ist massiv. Die transversale Mode $\delta m_y(q)$ hat keine Energielücke, d.h. diese Mode ist masselos.

- (b) Die Rechnung haben wir schon in Aufgabe 1 durchgeführt. Das Ergebnis ist

$$C_{\parallel}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{T}{A + Kq^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

$$C_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{T}{Kq^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

Das letzte Integral divergiert für $d = 1, 2$ und $q \rightarrow 0$:

$$d = 1 \quad \Rightarrow \quad C_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{T}{2\pi} \int \frac{dq}{Kq^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

$$d = 2 \quad \Rightarrow \quad C_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{T}{2\pi} \int \frac{dq}{Kq} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

Alle Integrale divergieren auch für $q \rightarrow \infty$. Diese Divergenz ist aber nicht wichtig, weil unsere Näherung für die freie Enthalpie in diesem Limes ungültig ist.

3. Kritische Exponenten:

Die freie Enthalpie:

$$G(t, h) = s^{\alpha-2}G(st, s^\Delta h) = |t|^{\alpha-2}g(h/|t|^\Delta).$$

Der Ordnungsparameter bei $h = 0$ ist

$$m = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_t = -|t|^{2-\alpha-\Delta} g'(h/|t|^\Delta).$$

Bei $h = 0$, $t \neq 0$ gilt $g'(x \rightarrow 0) \rightarrow const.$ Deswegen

$$m \sim |t|^\beta, \quad \beta = 2 - \alpha - \Delta.$$

Bei $h > 0$ ist die Phasenübergang über ein bestimmten Interval von Temperatur ausgebreitet. Dieses Interval finden wir von der Bedingung, dass der spontane Ordnungsparameter m die gleiche Größenordnung als der durch das Feld ausgelöste Ordnungsparameter $m_{ind} \sim \chi h$ hat:

$$m \sim \chi h \sim h|t|^{-\gamma} \Rightarrow h|t|^{-\gamma} \sim |t|^\beta \Rightarrow |t|^{\beta+\gamma} \sim h.$$

Alternativ kann man dieses Interval auf folgende Weise abschätzen. Wir vergleichen die zwei Beiträge zur freien Enthalpie: einen von dem Feld und einen von der thermischen Fluktuationen:

$$\delta G_h \sim mh, \quad \delta G_t \sim t^2 C.$$

Die beide Beiträge sollen von der gleichen Größenordnung sein. Dadurch finden wir:

$$mh \sim t^2 C \Rightarrow |t|^\beta |t|^{\beta+\gamma} \sim t^2 |t|^\alpha \Rightarrow \alpha + 2\beta + \gamma = 2.$$