Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman

PD Dr. B. Narozhny

Blatt 6

Besprechung 01.06.2018

---

1. Korrelationsfunktion der Fluktuationen im Ising-Modell: (35 Punkte)

In dieser Aufgabe berechnen Sie die Korrelationsfunktion der Fluktuationen im Ising-Modell.

Betrachten Sie die Landau-Theorie der Phasenübergänge. In der Fall des Ising-Modells ist der Ordnungsparameter ein Skalar, $m(\boldsymbol{r})$. In der Vorlesung haben wir die Relation zwischen der Suszebilität und der Korrelationsfunktion der Fluktuationen mithilfe des Fluktuations-Dissipations-Theorems hergeleitet. Die Relation ist

$$T\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'),$$

wobei

$$C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \langle \delta m(\boldsymbol{r}) \delta m(\boldsymbol{r}') \rangle,$$

die Korrelationsfunktion der Fluktuationen ist.

Berechnen Sie $C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ direkt mithilfe der funktionalen Integration und überprüfen Sie damit die obige Relation.

2. Mermin-Wagner-Theorem: (35 Punkte)

Das Mermin-Wagner-Theorem besagt, dass es in ein- und zweidimensionalen Systemen bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunkts keine langreichweitige Ordnung in Form zum Beispiel von Ferromagnetismus oder Antiferromagnetismus geben kann, solange diese isotrop sind (eine kontinuierliche Symmetrie besitzen).

In dieser Aufgabe betrachten Sie die Korrelationsfunktion der Fluktuationen in Rahmen der Landau-Theorie der Phasenübergangen mit einem Ordnungsparameter der eine zweikomponentige Größe, $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y)$, ist. In diesem Fall hat die freie Enthalpie folgende Form ($\boldsymbol{h} = 0$)

$$G = \int d^d r \left[\frac{t}{2} \boldsymbol{m}^2 + \frac{b}{4} \left(\boldsymbol{m}^2 \right)^2 + \frac{K}{2} \nabla_\alpha \boldsymbol{m} \nabla_\alpha \boldsymbol{m} \right].$$

Hier

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{m} \nabla_\alpha \boldsymbol{m} = \sum_{\alpha=x,y} \sum_{\beta=x,y} \partial_\alpha m_\beta \partial_\alpha m_\beta.$$

Betrachten Sie die Molekularfeldnäherung und bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c. Betrachten Sie jetzt die Symmetriebrechung, d.h. $\boldsymbol{m}$ hat im Rahmen der Molekularfeldnäherung eine bestimmte Richtung für $T < T_c$, z.B. $\boldsymbol{m} = m_0 \boldsymbol{e}_x$. Betrachten Sie die Fluktuationen.

(a) Zeigen Sie, dass es in diesem Problem zwei Fluktuationsmoden gibt: eine transversale und masselose (lückenlose)) Mode (die sogenannte Goldstone-Mode) und eine longitudinale und massive mode (die sogenannte Higgs-Mode).

(b) Berechnen Sie die Korrelationsfunktion für die beiden Moden, $C_\perp(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ und $C_\parallel(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Zeigen Sie, dass die Autokorrelationsfunktion, $C_\perp(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})$, divergiert. Das bedeutet dass die Ursprungliche Annahme falsch ist: es gibt keine Phasenübrgang in diesem System. Warum?

3. Kritische Exponenten: (30 Punkte)

In der Nähe des kritischen Punktes werden die kritische Exponenten zur Beschreibung des Verhaltens eines physikalischen Systems verwendet.

In der Vorlesung haben Sie die Widom-Hypothese gelehrnt: die freie Enthalpie genügt in der Nähe des kritischen Punktes der folgenden Gleichung:

$$G(t, h) = s^{\alpha-2} G(st, s^{\Delta} h),$$

wobei $t \propto T - T_c$.

Betrachten Sie die kritische Exponente für die Suszebilität:

$$\chi \sim |t|^{-\gamma},$$

und zeigen Sie dass

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2,$$

wobei

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta.$$