Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik Fb SS 18

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 7
Besprechung 08.06.2018

---

1. Drei-Niveau-Laser. (50 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Physik eines Drei-Niveau-Lasers zu untersuchen. Dies ist das einfachste System, dass als Laser benutzt werden kann. Die atomaren Energieniveaus seien $E_1 < E_2 < E_3$.

(a) Nehmen wir an, dass ein klassisches elektromagnetisches Feld Übergänge zwischen den Zuständen E_1 and E_3 (in beiden Richtungen) mit einer Rate Γ antreibt. Desweiteren kann das Niveau E_3 spontan in den Zustand E_2 mit einer Rate γ_{32} zerfallen, während der Zustand E_2 mit einer Rate γ_{21} nach E_1 spontan zerfallen kann. Stellen Sie die entsprechende Mastergleichung (für drei Warscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3) auf.

Finden Sie die stationäre Lösungen $p_i(t = \infty)$ der Mastergleichung. Zeigen Sie, dass der stationäre Zustand bei $\gamma_{21} < \Gamma\gamma_{32}/(\Gamma + \gamma_{32})$ durch eine Besetzungsinversion der atomaren Niveaus charakterisiert wird, $p_2(\infty) > p_1(\infty)$. Untersuchen Sie die stationäre Lösungen im Grenzfall $\gamma_{21} \ll \gamma_{32} \ll \Gamma$.

(b) Betrachten wir nun N unabhängige Drei-Niveau-Systeme (Drei-Niveau-Atome) in einem Hohlraum (elektromagnetischer Resonator), der eine resonante elektromagnetische Mode mit der Frequenz $\omega = E_2 - E_1$ aufweisst. Die Photonen im Hohlraum können von den Atomen absorbiert werden (verbunden mit Übergang $E_1 \to E_2$). Sie können auch einen stimulierten Übergang $E_2 \to E_1$ hervorrufen, wobei ein Photon in den Hohlraum emitiert wird. Die korrespondierenden Übergangsraten sind identisch und proportional zur Anzahl der Photonen im Hohlraum, $\gamma_{12} = \gamma_{21}^{\text{st}} = gn$. Zur Vereinfachung vernachlässigen wir von nun an spontane Übergänge $E_2 \to E_1$ (die wir in Aufgabe (a) mit der rate γ_{21} beschrieben haben). Stellen Sie die neue Mastergleichung auf.

Die Mastergleichung sollte durch die Gleichung für die Anzahl der Photonen im Hohlraum ergänzt werden. Da alle Übergänge $E_2 \to E_1$ die Photonenzahl n um 1 erhöhen und Übergänge $E_1 \to E_2$ die Photonenzahl n um 1 verringern, erhalten wir

$$\dot{n} = gnN(p_2 - p_1) - \kappa n.$$

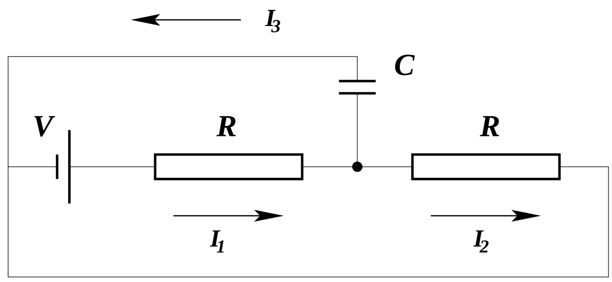
Der letzte Term in dieser Gleichung beschriebt den Abfluss von Photonen aus dem Hohlraum in die Aussenwelt.

Untersuchen Sie jetzt die neuen stationären Zustand. Als erste Schritt, drücken Sie $p_i(\infty)$ durch $n(\infty)$ und Übergangsraten aus. Dann analysieren Sie das Ergebnis im Limes $\Gamma \to \infty$.

(c) Benutzen Sie die Gleichung für die Photonenzahl um $n(\infty)$ zu finden (betrachten Sie nur den Limes $\Gamma \to \infty$). Zeigen Sie, dass für $\kappa > gN$ gilt $n(\infty) = 0$, während für $\kappa < gN$ gilt $n(\infty) > 0$. Finden Sie die entsprechenden $p_i(\infty)$.

Hinweis: Streng genommen hat das System für $\kappa < gN$ noch immer die Lösung $n = 0$. Es kann jedoch gezeigt werden das die Lösung $n = 0$ in diesem Regime instabil ist.

2. Langevin-Gleichung: RC-Schaltkreis (50 Punkte)



Wir betrachten den im Bild gezeigten RC-Schaltkreis. Die angelegte Spannung $V(t)$ kann zeitabhängig sein. Die kirchhoffschen Regeln führen zur Bewegungsgleichung

$$R\dot{q} = -\frac{2q}{C} + V(t) + \delta V_1(t) - \delta V_2(t),$$

wobei q die Ladung auf dem Kondensator ist und die stochastichen Spannungen δV_i beschreiben Nyquist-Rauschen der beiden Widerständen, d.h. es gilt

$$\langle \delta V_i(t_1)\delta V_j(t_2)\rangle = 2RT\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2).$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für beliebige δV_i (ohne Mittelung). Definieren Sie die Relaxationszeit des Kreises τ_r.

(b) Finden Sie der Mittelwert der Ladung $\langle q(t)\rangle_0$ und die Varianz $\langle q^2(t)\rangle_0 - \langle q(t)\rangle_0^2$ für $V = 0$. Bestätigen Sie dass die Energie des Kondensators im Limes $t \gg \tau_r$ zeitunabhängig ist und zwar das Äquipartitionstheorem erfüllt.

(c) Betrachten Sie jetzt einen stationäreren Vorgang mit $V(t) = V_0$. Finden Sie den Mittelwert der Ladung $\mu_q = \langle q(t)\rangle_{st}$ und die Varianz $\sigma_q^2 = \langle q^2(t)\rangle_{st} - \langle q(t)\rangle_{st}^2$. Benutzen Sie die Ergebnisse um die Verteilungsfunktion der Ladung, $\rho_{st}(q)$, zu finden.

Hinweis: die Statistik von δV_i ist gaußisch.

(d) Berechnen Sie jetzt die Fourier-Transformation um das erzeugenden Funktional zu finden

$$G_q(\chi) = \int dq e^{i\chi q}\rho_{st}(q).$$

Zeigen Sie, dass $G_q(\chi)$ die folgende Symmetry erfüllt:

$$G_q(\chi) = G_q(-\chi + iV/T).$$

(e) Betrachten Sie jetzt den folgenden Vorgang

$$V(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant t_0, \qquad t_0 \gg \tau_r, \\ V(t), & t_0 < t < t_0 + \mathcal{T}. \end{cases}$$

Berechnen Sie jetzt die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit wärend der Zeit $\mathcal{T}$ (das ist die gemittelte elektrische Leistung mal $\mathcal{T}$).

Finden Sie den Mittelwert, die Varianz und die Verteilungsfuntion der geleisteten Arbeit. Zeigen Sie, dass das erzeugende Funktional der Arbeit die folgende Symmetry erfüllt:

$$G_p(\lambda) = G_p(-\lambda + 1/T).$$