Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb)    Sommersemester 2019**

**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
**PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex**

**1. Klausur, 24.06.2019, Gerthsen-HS**
**120 Minuten: 16:00-18:00 Uhr**

---

**1. Dimerisierung im 1D-Ising-Modell:** (20+20=40 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell für $2N$ Spins ($S = 1/2$) auf einem Ring ($s^z_{2N+1} = s^z_1$) mit einer "Dimerisierung" der Kette, d.h. die Bindungen werden alternierend geschwächt und gestärkt:

$$H = -J\left[(1-\phi)\sum_{i=1}^{N} s^z_{2i-1}s^z_{2i} + (1+\phi)\sum_{i=1}^{N} s^z_{2i}s^z_{2i+1}\right].$$

Dabei ist $\phi$ ein fester Parameter mit $0 \leq \phi \leq 1$.

(a) Führen Sie die Transfermatrixmethode aus, um die kanonische Zustandssumme $Z$ des Modells auszudrücken. Berechnen Sie die Entropie der Kette im Limes $N \to \infty$.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Transfermatrixmethode für $N \to \infty$ die Korrelationsfunktion $\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle - \langle\sigma_i\rangle^2$ und die Korrelationslänge $\xi$. Dabei sei $i$ ungerade, $n$ gerade und $n \ll N$.

(c) **10 Bonuspunkte:**
Nun sei $\phi$ nicht mehr fest, sondern soll als zusätzlicher Freiheitsgrad betrachtet werden. Dafür muss $H$ um die Dimerisierungsenergie ergänzt werden: $H \to H + H_\phi$ mit $H_\phi = 2N\Omega\phi^2$ , wobei $\Omega > 0$ die Energiekosten der Dimerisierung darstellt.
Leiten Sie, ausgehend von $Z$, das Freie-Energiedichte-Funktional in der Form

$$f(\phi) = f_N + \frac{t}{2}\phi^2 + b\phi^4$$

für $\phi \ll 1$ her und bestimmen Sie $f_N$, $t$ und $b$.
*Hinweis:*

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\,,$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\,.$$

Bitte wenden!

**2. Gekoppelte Ordnungsparameter:** (14 + 16 = 30 Punkte)

Das Freie-Energiedichte-Funktional für ein System mit zwei gekoppelten magnetischen Ordnungsparametern $\phi_1$ und $\phi_2$ im Magnetfeld lautet:

$$f(\phi_1, \phi_2) = a\,(T - T_0)\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + b\,\left(\phi_1^4 + \phi_2^4\right) + \frac{g}{2}\,(\phi_1 + \phi_2)^2 - h\,(\phi_1 + \phi_2)\,,$$

wobei $T_0, a, b, g > 0$.

(a) Berechnen Sie die Suszeptibilität $\chi_1(T) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial h}$ im thermischen Gleichgewicht in der ungeordneten Phase.
*Hinweis: Es ist nützlich, zunächst zu neuen Variablen $\phi_\pm = \frac{1}{2}(\phi_1 \pm \phi_2)$ überzugehen.*

(b) Berechnen Sie die Suszeptibilität $\chi_1(T)$ im thermischen Gleichgewicht in der geordneten Phase.
*Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass in der geordneten Phase im Gleichgewicht $\lim_{h\to 0}\phi_+ = 0$ gilt.*

(c) **10 Bonuspunkte:**
Beweisen Sie nun, dass in der geordneten Phase bei $h = 0$ im Gleichgewicht $\phi_1 = -\phi_2$ ist.

**3. Master-Gleichung:** (14 + 16 = 30 Punkte)

Betrachten Sie ein Drei-Niveau-Atom mit Energien $E_1 < E_2 < E_3$. Die Wahrscheinlichkeiten, das Atom in den entsprechenden Zuständen zu finden, werden als $p_i(t)$ bezeichnet ($i = 1, 2, 3$). Nehmen Sie an, dass ein klassisches elektromagnetisches Feld Übergänge von $E_1$ nach $E_3$ und umgekehrt mit den Raten $\gamma_{13} = \gamma_{31}$ antreibt. Desweiteren kann das Niveau $E_3$ spontan in das Niveau $E_2$ mit einer Rate von $\gamma_{32}$ zerfallen, während Zustand $E_2$ mit einer Rate von $\gamma_{21}$ nach $E_1$ zerfallen kann, wobei die inversen Prozesse nicht auftreten sollen ($\gamma_{23} = \gamma_{12} = 0$).

(a) Geben Sie die Master-Gleichungen für $\{p_i\}$ an. Finden Sie die Gleichgewichtslösungen $p_i(t = \infty)$ der Master-Gleichung. Welche Bedingung müssen die Raten erfüllen, damit im Gleichgewicht eine Besetzungsinversion der atomaren Niveaus auftritt, d.h. $p_2(\infty) > p_1(\infty)$?

(b) Betrachten Sie nun $N$ unabhängige solcher Drei-Niveau-Atome in einem Hohlraum (elektromagnetischer Resonator). Die Photonen im Hohlraum können von den Atomen absorbiert werden ($E_1 \to E_2$) und auch einen stimulierten Übergang $E_2 \to E_1$ hervorrufen. Insgesamt sind die Übergangsraten zwischen den Niveaus $E_1$ und $E_2$ nun $\gamma_{12} = \gamma\, n$ und $\gamma_{21} = \gamma\,(n + 1)$, während $\gamma_{13}, \gamma_{31}, \gamma_{23}, \gamma_{32}$ unverändert bleiben. Dabei bezeichnet $n$ die Anzahl der Photonen im Hohlraum. Die Master-Gleichung für $n$ (zusätzlich zu den Gleichungen für $p_i$) lautet dann

$$\dot{n} = \gamma\, N\,[(n + 1)p_2 - np_1] - \Gamma n.$$

Der letzte Term beschreibt einen Abfluss von Photonen aus dem Hohlraum mit der Rate $\Gamma$.

Drücken Sie $p_i(\infty)$ durch $n(\infty)$ und die Übergangsraten aus. Bestimmen Sie $p_i(\infty)$ und $n(\infty)$ im Limes $\gamma_{13} \to \infty$.