Moderne Theoretische Physik IIIb (Theorie Fb) Sommersemester 2019Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Dr. Stefan Rex**Blatt 5**
Besprechung: 31.05.2019**1. Master-Gleichung:** (15+25=40 Punkte)

Ein Kasten A vom Volumen V sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden. Teilchen können das Loch nur einzeln passieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei $\alpha N \Delta t / V$ (N : Zahl der Teilchen in A; $\alpha = \text{konst.}$), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei $\alpha n \Delta t$ (n : konstante Teilchendichte in B).

- (a) Sei $\rho(N, t)$ die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t gerade N Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Master-Gleichung für $\rho(N, t)$ auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.

Lösung Die Mastergleichung ist

$$\frac{dP_k}{dt} = \sum_l (T_{kl}P_l - T_{lk}P_k) \quad (\text{L1})$$

Dabei ist P_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System im Zustand k ist. T_{kl} ist die Übergangsrate vom Zustand l nach k . Summiert wird über alle Zustände. In unserem System sei k der Zustand mit k Teilchen im Kasten A. Möglich sind Zustände mit $l \geq 0$. Außerdem haben wir, wenn die Zeit des Übergangs so klein ist, dass maximal ein Teilchen den Kasten wechselt

$$T_{kl} = \delta_{k+1,l} \frac{\alpha l}{V} + \delta_{k-1,l} \alpha n. \quad (\text{L2})$$

Also gilt

$$\frac{d\rho(N, t)}{dt} = \sum_{l=0}^{\infty} T_{Nl} \rho(l, t) - T_{lN} \rho(N, t) \quad (\text{L3})$$

$$= \alpha \left(\rho(N+1, t) \frac{N+1}{V} + \rho(N-1, t) n - \left(\frac{N}{V} + n \right) \rho(N, t) \right) \quad (\text{L4})$$

Stationärer Fall bedeutet

$$\frac{d\rho(N, t)}{dt} = 0. \quad (\text{L5})$$

Da das Ergebnis unabhängig von t sein wird, schreiben wir im Folgenden kein t Argument mehr.

Wir finden damit

$$\rho(N+1) = \left(\left(\frac{N}{V} + n \right) \rho(N) - n \rho(N-1) \right) \frac{V}{N+1} \quad (\text{L6})$$

Um einen vernünftigen Ansatz erahnen zu können schreiben wir diese Bedingung für $N = 1$ und $N = 2$ aus:

$$\rho(1) = nV\rho(0) \quad (\text{L7})$$

und

$$\rho(2) = \rho(0)\frac{V}{2}\left(n - \left(\frac{1}{V} + n\right)nV\right) \quad (\text{L8})$$

$$\Rightarrow \rho(2) = \frac{n^2V^2\rho(0)}{2}. \quad (\text{L9})$$

Wir raten

$$\rho(N) = \frac{Vn}{N}\rho(N-1) \quad (\text{L10})$$

und zeigen das durch vollständige Induktion.

(Alternativ zum Raten des Ansatzes können wir auch Gleichung (L4) fouriertransformieren und die charakteristische Gleichung lösen.) Den Induktionsanfang bilden Gleichungen (L7) und (L9), Gleichung (L10) ist Induktionsvoraussetzung.

Für den Induktionsschritt nutzen wir Gleichung (L6):

$$\rho(N+1) \stackrel{(\text{L10})}{=} \frac{V}{N+1}\left(\left(\frac{N}{V} + n\right)\frac{nV}{N}\rho(N-1) - n\rho(N-1)\right) \quad (\text{L11})$$

$$\stackrel{(\text{L10})}{=} \frac{V}{N+1}n\rho(N) \quad (\text{L12})$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Wir erhalten mit Gleichung (L10)

$$\rho(N) = \rho_0 \frac{(Vn)^N}{N!}. \quad (\text{L13})$$

Jetzt nutzen wir noch die Normiertheit von $\rho(N)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \rho(l) = 1 \quad (\text{L14})$$

um ρ_0 zu bestimmen:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \rho(l) = \rho_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(Vn)^l}{l!} \quad (\text{L15})$$

$$= \rho_0 e^{nV} \quad (\text{L16})$$

$$\stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{L17})$$

$$\Rightarrow \rho_0 = e^{-nV} \quad (\text{L18})$$

und erhalten endlich

$$\rho(N) = e^{-nV} \frac{(nV)^N}{N!} \quad (\text{L19})$$

als Lösung für den stationären Fall. Die Lösung entspricht einer Poisson-Verteilung.

(b) Bestimmen Sie $\langle N(t) \rangle$ und $\langle N^2(t) \rangle - \langle N(t) \rangle^2$ für $N(t=0) = N_0$.

Lösung $\langle N(t) \rangle$ ist definiert als

$$\langle N(t) \rangle \equiv \sum_m m \rho(m, t) \quad (\text{L20})$$

Wir leiten den Erwartungswert nach der Zeit ab, um eine Differentialgleichung für $\langle N(t) \rangle$ zu erhalten, die wir dann lösen können. Auf der rechten Seite setzen wir die Mastergleichung für $\rho(N, t)$ ein (Alternative Sichtweise: Wir multiplizieren (L4) mit N und summieren über N):

$$\frac{\partial \langle N(t) \rangle}{\partial t} = \alpha \sum_m m \left(\rho(m+1, t) \frac{m+1}{V} + n \rho(m-1, t) - \left(\frac{m}{V} + n \right) \rho(m, t) \right) \quad (\text{L21})$$

In den Termen mit $\rho(m \pm 1, t)$ führen wir Indexshifts durch. Da alle unpassenden Terme 0 werden, können alle Summen weiterhin bei 0 starten. Wir erhalten

$$\frac{\partial \langle N(t) \rangle}{\partial t} = \alpha \sum_m \rho(m, t) \left(n - \frac{m}{V} \right) \quad (\text{L22})$$

$$= \alpha \left(n - \frac{1}{V} \langle N(t) \rangle \right) \quad (\text{L23})$$

Wir verwenden zur Lösung den Ansatz

$$\langle N(t) \rangle = A e^{-\lambda t} + B \quad (\text{L24})$$

und erhalten unter Verwendung der Anfangsbedingung $N(t=0) =: N_0$

$$\langle N(t) \rangle = (N_0 - nV) \exp\left(-\frac{\alpha}{V} t\right) + nV. \quad (\text{L25})$$

Jetzt sehen wir

$$\langle N(t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} nV =: N_\infty$$

Also

$$\langle N(t) \rangle = (N_0 - N_\infty) \exp\left(-\frac{\alpha}{V} t\right) + N_\infty$$

Als nächstes führen wir eine analoge Rechnung für $\langle N^2(t) \rangle$ durch:

$$\frac{\partial \langle N^2(t) \rangle}{\partial t} = \alpha \left[n + \langle N(t) \rangle \left(\frac{1}{V} + 2n \right) - \frac{2}{V} \langle N^2(t) \rangle \right] \quad (\text{L26})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\langle N^2(t) \rangle - \langle N(t) \rangle^2)}_{=: f(t)} = \alpha \left(n + \frac{\langle N(t) \rangle}{V} - \frac{2}{V} \langle N^2(t) \rangle + \frac{2}{V} \langle N(t) \rangle^2 \right) \quad (\text{L27})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(t) = \alpha \left(n + \frac{\langle N(t) \rangle}{V} - 2 \frac{f(t)}{V} \right) \quad (\text{L28})$$

die homogene Lösung ist

$$f_{\text{hom}}(t) = A e^{-\frac{2t\alpha}{V}}. \quad (\text{L29})$$

Für die inhomogene Lösung setzen wir an

$$f_{\text{inh}}(t) = Be^{-\lambda t} + C \quad (\text{L30})$$

und finden

$$\lambda = \frac{\alpha}{V} \quad (\text{L31})$$

$$C = N_\infty \quad (\text{L32})$$

$$B = (N_0 - N_\infty) \quad (\text{L33})$$

Die Anfangsbedingung

$$f(t=0) = \langle N(t=0)^2 \rangle - \langle N(t=0) \rangle^2 = 0 \quad (\text{L34})$$

liefert $A = -N_0$ und wir erhalten insgesamt

$$\langle N(t)^2 \rangle - \langle N(t) \rangle^2 = -N_0 e^{-\frac{2\alpha}{V}t} + (N_0 - N_\infty) e^{-\frac{\alpha}{V}t} + N_\infty \quad (\text{L35})$$

Wir beobachten

$$\frac{\sqrt{\langle N(t)^2 \rangle - \langle N(t) \rangle^2}}{\langle N(t) \rangle} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N_\infty}}$$

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ haben wir also wieder das Verhalten einer Poissonverteilung.

2. Zwei-Niveau-Atom

(20+10=30 Punkte)

Betrachten Sie ein Atom, das sich in einem von zwei Zuständen mit den Energien $E_2 > E_1$ befinden kann. Die Wahrscheinlichkeiten, das Atom in diesen Zuständen zu finden, werden als p_i bezeichnet ($i = 1, 2$; $p_1 + p_2 = 1$). Die Wechselwirkung des Atoms mit dem elektromagnetischen Feld führt zu Übergängen zwischen den Zuständen mit den Raten γ_{12} und $\gamma_{21} \geq \gamma_{12}$.

- (a) Geben Sie die Master-Gleichung für $\{p_i(t)\}$ an. Lösen Sie die Master-Gleichung mit den Anfangsbedingungen $p_i(t=0) = p_{i0}$. Wie verhält sich die Temperatur T_A eines Systems solcher Zwei-Niveau-Atome bei $t = \infty$ für $\gamma_{12} = \gamma_{21}$?

Lösung die Mastergleichungen für die $\{p_i(t)\}$ sind

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\gamma_{12}p_1(t) + \gamma_{21}p_2(t) \quad (\text{L36})$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \gamma_{12}p_1(t) - \gamma_{21}p_2(t) \quad (\text{L37})$$

Wenn wir $p_2(t) = 1 - p_1(t)$ in die erste Gleichung einsetzen erhalten wir

$$\dot{p}_1(t) = -\gamma_{12}p_1(t) + \gamma_{21}(1 - p_1(t)) \quad (\text{L38})$$

$$= p_1(t) \underbrace{(-\gamma_{12} - \gamma_{21})}_{=:-\gamma} + \gamma_{21} \quad (\text{L39})$$

Diese Gleichung wird von dem Ansatz

$$p_1(t) = Ae^{-\gamma t} + \frac{\gamma_{21}}{\gamma} \quad (\text{L40})$$

gelöst. A bestimmen wir durch die Anfangsbedingung $p_1(t=0) = p_{10}$:

$$p_1(t) = \left(p_{10} - \frac{\gamma_{21}}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} + \frac{\gamma_{21}}{\gamma} \quad (\text{L41})$$

Und mit $p_2(t) = 1 - p_1(t)$ erhalten wir

$$p_2(t) = \left(\frac{\gamma_{21}}{\gamma} - p_{10} \right) e^{-\gamma t} + \frac{\gamma_{12}}{\gamma} \quad (\text{L42})$$

Als nächstes berechnen wir die Temperatur des Systems. Für die Entropie und Energie pro Atom gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \langle S(p) \rangle &= -k_B [p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2)] = -k_B [(1-p_2) \ln(1-p_2) + p_2 \ln(p_2)] \\ \frac{1}{N} \langle E(p) \rangle &= p_1 E_1 + p_2 E_2 = E_1 + p_2 (E_2 - E_1) \end{aligned}$$

Es gilt

$$T^{-1} = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = \frac{\partial S(p_2)}{\partial p_2} \frac{\partial p_2(E)}{\partial E} = \frac{k_B}{E_2 - E_1} \ln \frac{1-p_2}{p_2}$$

Für $t \rightarrow \infty$ und $\gamma_{21} = \gamma_{12}$ erhalten wir

$$p_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{21}}{\gamma} = \frac{1}{2} \quad (\text{L43})$$

$$p_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{12}}{\gamma} = \frac{1}{2}. \quad (\text{L44})$$

Das in den Temperatúrausdruck eingesetzt ergibt ($E_2 > E_1$ laut Aufgabenstellung)

$$T^{-1} \rightarrow 0 \quad (\text{L45})$$

$$\Rightarrow T \rightarrow \infty. \quad (\text{L46})$$

Der Ursprung der unendlichen Temperatur im System sind die von uns vorgegebenen konstanten Raten $\gamma_{12} = \gamma_{21}$.

- (b) Werden die Übergänge zwischen den Niveaus durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Quantenfeld der Frequenz $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ (im Gleichgewicht) angeregt, sind die Übergangsraten durch

$$\gamma_{12} = \Gamma n_B(\hbar\omega), \quad \gamma_{21} = \Gamma + \Gamma n_B(\hbar\omega) \quad (1)$$

gegeben, wobei n_B die Gleichgewichtsverteilung der Photonen mit Temperatur T beschreibt und Γ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass die Raten (1) die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts erfüllen und finden Sie $p_i(\infty)$.

Lösung Die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts steht im Skript auf Seite 124a und lautet

$$\frac{W_{n' \rightarrow n}}{W_{n \rightarrow n'}} = \exp\left(-\frac{E(n) - E(n')}{k_B T}\right) \quad (\text{L47})$$

für γ_{12} und γ_{21} finden wir (gegeben $n_B(\hbar\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega} - 1}$)

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21}} = \frac{n_B(\hbar\omega)}{1 + n_B(\hbar\omega)} = e^{-\beta\hbar\omega} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} \quad (\text{L48})$$

die Bedingung ist also erfüllt.

Jetzt noch $p_i(\infty)$. Wir setzen die γ s in die Ausdrücke aus Gleichung (L44) ein:

$$p_1 \rightarrow \frac{1 + n_B(\hbar\omega)}{1 + 2n_B(\hbar\omega)} = \frac{1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega} - 1}}{1 + \frac{2}{e^{\hbar\omega} - 1}} = \frac{1}{1 + e^{-\hbar\omega}} \quad (\text{L49})$$

$$p_2 \rightarrow \frac{n_B(\hbar\omega)}{1 + 2n_B(\hbar\omega)} = \frac{\frac{1}{e^{\hbar\omega} - 1}}{1 + \frac{2}{e^{\hbar\omega} - 1}} = \frac{1}{1 + e^{\hbar\omega}} \quad (\text{L50})$$

3. Fokker-Planck-Gleichung: (30 Punkte)

Lösen Sie die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [\gamma x \rho(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad (2)$$

mit Anfangsbedingung $\rho(x, 0) = \delta(x)$. In der Vorlesung haben Sie den Random Walk in einem konstanten externen Feld behandelt (konstante Driftgeschwindigkeit). Was für ein Feld würde auf die obige Fokker-Planck-Gleichung führen?

Lösung Mit

$$\tilde{\rho}(x, \omega) = \int dt e^{it\omega} \rho(x, t) \quad (\text{L51})$$

haben wir in Gleichung (2)

$$-i\omega \tilde{\rho}(x, \omega) = -\frac{\partial}{\partial x} \gamma x \tilde{\rho}(x, \omega) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\rho}(x, \omega) \quad (\text{L52})$$

$$\Rightarrow -i\omega \tilde{\rho}(x, \omega) = -\gamma x \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\rho}(x, \omega) - \gamma \tilde{\rho}(x, \omega) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\rho}(x, \omega). \quad (\text{L53})$$

Dabei haben wir $\rho(x, t)$ für $t \in [-\infty, \infty]$ verwendet, um die Fouriertransformation durchzuführen. Allerdings ist nicht damit zu rechnen, dass $\rho(x, t)$ für $t < 0$ eine nahe liegende physikalische Interpretation hat, da man sich schlecht eine Funktion vorstellen kann, die mit der Zeit zur Deltafunktion wird, die wir ja als Anfangsbedingung für $t = 0$ haben. Die Fortsetzung von $\rho(x, t)$ für $t < 0$ ist also nur als Trick zu verstehen, um die Fouriertransformation durchführen zu können.

Jetzt fouriertransformieren wir auch noch im zweiten Argument

$$\hat{\tilde{\rho}}(k, \omega) = \int dx e^{-ikx} \tilde{\rho}(x, \omega) \quad (\text{L54})$$

und erhalten

$$-i\omega \hat{\tilde{\rho}}(k, \omega) = \gamma \frac{\partial}{\partial k} k \hat{\tilde{\rho}}(k, \omega) - \gamma \hat{\tilde{\rho}}(k, \omega) - D k^2 \hat{\tilde{\rho}}(k, \omega) \quad (\text{L55})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}(k, \omega)}{\partial k} \frac{1}{\hat{\tilde{\rho}}(k, \omega)} = -i \frac{\omega}{k\gamma} + \frac{Dk}{\gamma} \quad (\text{L56})$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen. Dabei und im Folgenden ignorieren wir konstante Faktoren, da wir für den korrekten Vorfaktor der endgültigen Verteilung die Normiertheit der Verteilung benutzen können.

$$\log\left(\frac{\hat{\rho}(k, \omega)}{\rho_0}\right) = -i\frac{\omega}{\gamma} \log\left(\frac{k}{k_0}\right) + \frac{D(k^2 - k_0^2)}{2\gamma} \quad (\text{L57})$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}(k, \omega) = \hat{C}(\omega) k^{-i\frac{\omega}{\gamma}} e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \quad (\text{L58})$$

$$= \hat{C}(\omega) \exp\left(\log\left(k^{-i\frac{\omega}{\gamma}}\right)\right) e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \quad (\text{L59})$$

$$= \hat{C}(\omega) \exp\left(-\frac{i\omega}{\gamma} \log(k)\right) e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \quad (\text{L60})$$

Jetzt wollen wir die Rücktransformation zu $\hat{\rho}(k, t)$ durchführen. Dabei müssen wir darauf achten, dass die Integrationskonstante $\hat{C}$ durchaus noch von ω abhängen kann. Also nutzen wir bei der Transformation erstmal, dass die Fouriertrafo eines Produktes die Faltung der Fouriertransformierten ist

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k) \hat{g}(k) = \int dx' f(x') g(x - x') =: (f * g)(x) \quad (\text{L61})$$

und dann die Anfangsbedingung, um C im Ortsraum zu bestimmen.

$$\hat{\rho}(k, t) = e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \left(C * \int d\omega \exp\left[-i\omega \left(t + \frac{\log(k)}{\gamma}\right)\right] \right) (t) \quad (\text{L62})$$

$$= e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \int dt' C(t - t') \delta\left(t' + \frac{\log(k)}{\gamma}\right) \quad (\text{L63})$$

$$= e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} C\left(t + \frac{\log(k)}{\gamma}\right) \quad (\text{L64})$$

Jetzt verwenden wir die Bedingung aus der Aufgabenstellung

$$\rho(x, 0) = \delta(x) \quad (\text{L65})$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}(k, 0) = \int dx \delta(x) \exp(ikx) = 1 \quad (\text{L66})$$

Dafür setzen wir $t = 0$ in unseren Ausdruck für $\hat{\rho}(k, t)$ ein und fordern Konstanz

$$\hat{\rho}(k, 0) = e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} C\left(\frac{\log(k)}{\gamma}\right) \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{L67})$$

So finden wir

$$C(t) = \exp\left(-\frac{D}{2\gamma} e^{2t\gamma}\right) \quad (\text{L68})$$

und also insgesamt für $\hat{\rho}(k, t)$

$$\hat{\rho}(k, t) \sim e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \exp\left(-\frac{D}{2\gamma} \exp\left[2\left(t + \frac{\log(k)}{\gamma}\right)\gamma\right]\right) \quad (\text{L69})$$

$$= e^{\frac{Dk^2}{2\gamma}} \exp\left(-\frac{D}{2\gamma} k^2 \exp(2t\gamma)\right) \quad (\text{L70})$$

Jetzt müssen wir noch zurück zu $\rho(x, t)$.

Es gilt (quadratische Ergänzung, Integralsatz für holomorphe Funktion)

$$\int dk e^{-\alpha k^2} e^{-ikx} \sim \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right) \quad (\text{L71})$$

$$\alpha = -\frac{D}{2\gamma} (1 - e^{2t\gamma}) \quad \text{hier} \quad (\text{L72})$$

also haben wir

$$\rho(x, t) \sim \exp\left(-\frac{\gamma x^2}{2D(e^{2t\gamma} - 1)}\right) \quad (\text{L73})$$

und da

$$\int dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{L74})$$

und

$$\int dx \rho(x, t) \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{L75})$$

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(e^{2t\gamma} - 1)}} \exp\left(-\frac{\gamma x^2}{2D(e^{2t\gamma} - 1)}\right) \quad (\text{L76})$$

Wie am Anfang ausgeführt sollte dieses Ergebnis nur für $t \geq 0$ verstanden werden.

Wir machen einige interessante Beobachtungen: Wenn $\gamma < 0$ haben wir für $t \rightarrow \infty$

$$\rho(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{|\gamma|}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{|\gamma|x^2}{2D}\right)$$

Was der Verteilung im Gleichgewicht entspricht. Desweiteren erhalten wir mit einer Entwicklung in $\gamma t \ll 1$

$$\rho(x, t) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

In der Vorlesung (S. 127) hatten wir für ein konstantes externes Feld

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{v}t)^2}{4Dt}\right].$$

Das entspricht in diesem Grenzfall und für $\bar{v} = 0$ dem Ergebnis aus dieser Aufgabe.

Wenn wir Gleichung (2) mit der Fokker-Planck Gleichung aus dem Skript (S. 125) vergleichen, so können wir γx mit α identifizieren, wofür nach Skript gilt

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial \langle X(t) \rangle}{\partial t} = \gamma x$$

entsprechend einer Driftgeschwindigkeit.

Auf S. 129 im Skript wird mit Hilfe der Langevin Gleichung $\frac{\partial \langle X(t) \rangle}{\partial t}$ als proportional zur äußeren Kraft identifiziert. Im Unterschied zur Vorlesung haben wir also ein externes Feld, das eine linear ortsabhängige Kraft auf das Teilchen ausübt. Mit anderen Worten befindet sich das System in einem parabolischen Potential.