Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Besprechung 29.04.2011

---

1. Ideales Gas: (4 Punkte)

Für ein ideales Gas aus N Teilchen (Molekülen) mit f Freiheitsgraden pro Molekül lauten die Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2}NkT, \quad pV = NkT.$$

Betrachten Sie eine *adiabatische* Zustandsänderung bei konstanter Teilchenzahl, und zeigen Sie über den 1. Hauptsatz, dass gilt:

$$pV^{(f+2)/f} = \text{const.}, \quad VT^{f/2} = \text{const.}$$

2. Entropie des idealen Gases: (3 + 3 = 6 Punkte)

Für ein ideales Gas gilt:

$$U = \frac{f}{2}NkT, \quad pV = NkT, \quad \text{und} \quad TS = U + pV - \mu N.$$

(a) Berechnen Sie daraus die Entropie

$$S(U,V,N) = S_0\frac{N}{N_0} + Nk\left[\frac{f}{2}\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2}\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\right]$$

wobei S_0, U_0, V_0, N_0 Integrationskonstanten sind.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\,\mathrm{d}u + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}v \quad \text{mit} \quad s = S/N, u = U/N, v = V/N.$$

(b) Warum verletzt das ideale Gas den 3. Hauptsatz der Thermodynamik?

3. Thermodynamische Antwortfunktionen: (6 + 6 = 12 Punkte)

Ein magnetisches System sei durch die Zustandsgrößen S, T, Magnetisierung M und das Magnetfeld H bestimmt. Betrachten Sie die Freie Energie

$$d\tilde{F} = -SdT - MdH.$$

Von experimentellem Interesse sind die Antwortfunktionen

$$c_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M, \; c_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H, \; \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S, \; \chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T.$$

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{c_H}{c_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S}.$$

Hinweis: Wir haben T und H als unabhängige Variablen gewählt. Dann kann man die Antwortfunktionen c_H und χ_T einfach laut Definition berechnen. Um c_M und χ_S zu berechnen, betrachten Sie das vollständige Differential von $M(T, H)$ und $S(T, H)$.

(b) Betrachten Sie jetzt das homogene magnetische Material mit

$$M = \chi(T)H.$$

Berechnen Sie die Antwortfunktionen c_M, c_H, χ_T, und χ_S und zeigen Sie ausdrücklich dass die obengenannte Relation gilt.

Hinweis:

$$S = -\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial T}\right)_H.$$

4. Physikalische Bedeutung der Freien Energie: (4 Punkte)

Ein System Σ werde mit einem Wärmereservior R mit Temperatur T_R in Kontakt gebracht. Teilchenaustausch sei nicht möglich. Die Volumina beider Systeme seien konstant. Die Änderung der inneren Energie von R kann nur durch Wärmeaustausch erfolgen, $\delta U_R = \delta Q_R = T_R\, dS_R$. Das Reservoir R sei so groß, dass T_R sich beim Wärmeaustausch praktisch nicht ändert, und somit Zustandsänderungen von R reversibel sind. Das aus Σ und R bestehende Gesamtsystem sei abgeschlossen. Was bedeutet das für eine infinitesimale Energieänderung der Teilsysteme? Drücken Sie die einzelnen Beiträge allein durch Änderung der extensiven Variablen U_Σ und S_Σ aus, und leiten Sie

$$dU_\Sigma \leq T_R\, dS_\Sigma \tag{1}$$

her. Leiten Sie daraus ein Extremalprinzip für die Helmholtzsche Freie Energie ab.

5. Stirlingsche Formel: (4 Punkte)

Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e} \right)^N . \tag{2}$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $N!$ über die Gammafunktion

$$N! = \int_0^\infty dx \, x^N \, e^{-x} \tag{3}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - N$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.