Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 4
Besprechung 13.05.2011

---

1. Maxwell-Verteilung: (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde der folgende Ausdruck für die mikrokanonische Verteilungsfunktion postuliert:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Sigma(E)dE}, & E < H(x) < E + dE; \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei x ein Punkt im Phasenraum ist. Im Limes $dE \to 0$ kann man $\rho(x)$ durch eine Delta-Funktion ausdrücken

$$\rho(x) \Rightarrow C_0 \delta(H(x) - E), \quad [C_0 = 1/\Sigma(E)].$$

Die Wahrscheinlichkeit dw, das System im Phasenvolumenelement dx zu finden, lautet dann

$$dw = \rho(x)dx.$$

Betrachten Sie das ideale Gas mit N Teilchen, Gesamtenergie E und Volumen V. Drücken Sie die Gesamtenergie $H[\{p_n\}, \{x_n\}]$ des Gases durch die Koordinaten und die Impulse der Teilchen aus. Die Wahrscheinlichkeit dw lautet nun

$$dw = C_0 \delta(H[\{p_n\}, \{x_n\}] - E) \prod_{n=1}^{N} d^3p_n d^3x_n \ .$$

Bestimmen Sie die 1-Teilchen-Verteilungsfunktion

$$\rho_1(x_1, p_1) \equiv \int \prod_{n=2}^{N} d^3p_n d^3x_n \, \rho(x)$$

und dadurch die 1-Teilchen-Impulsverteilung $f(p_1) = \int d^3x_1 \, \rho_1(x_1, p_1)$. Drücken Sie das Ergebnis durch die Energie pro Teilchen $\bar{\epsilon} = E/N$ aus. Vereinfachen Sie das Ergebnis im Limes $N \gg 1$. Die Normierungskonstante ist in dieser Übung nicht wichtig.

Hinweis: Für $N \gg 1$ gilt $\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N \approx e^{-x}$. Die Maxwell-Verteilung ergibt sich aus der für das ideale Gas gültige Relation $\bar{\epsilon} = 3k_{\mathrm{B}}T/2$.

2. Kanonische Gesamtheit: $(2+2=4$ Punkte$)$

In der kanonischen Gesamtheit ($\rho_n = Z^{-1}e^{-\beta E_n}$) ist die innere Energie durch einen Mittelwert $U = \langle E \rangle$ gegeben.

(a) Beweisen Sie die folgende Relation

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = k_B T^2 C_V \ ,$$

wobei die Varianz definiert als $\langle (\Delta E)^2 \rangle \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ ist und C_V die Wärmekapazität ist.

(b) Für ein Gas aus N Teilchen begründen Sie die Kleinheit der Schwankungen

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}}{\langle E \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3. Curie-Paramagnetismus: $(3+4+3=10$ Punkte$)$

Betrachten Sie N unabhängige Spin-1/2-Teilchen im äußeren Magnetfeld $\mathbf{H}$. Der Hamilton-Operator lautet

$$\hat{H} = -\mu \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i \mathbf{H} \ .$$

Bestimmen Sie

(a) die freie Energie $F(T, \mathbf{H})$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme faktorisiert, $Z = (Z_1)^N$, und berechnen Sie Z_1.

(b) die thermodinamischen Größen, d.h. die Entropie S, die Magnetisierung $\mathbf{M} = \mu \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{S}_i \rangle$ und die Wärmekapazitäten

$$c_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H \ ; \quad c_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M .$$

(c) die Näherungsausdrücke für M für kleine Magnetfelder $H/k_\mathrm{B}T \ll 1$ und große Magnetfelder $H/k_\mathrm{B}T \gg 1$, und berechnen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität

$$\chi(T) = \lim_{H \to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T .$$