Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik F SS 11

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag zu Blatt 11
8.7.2011

---

1. Ising-Modell

Benutzen wir die folgenden Matrizen (wir schreiben σ statt σ^z):

$$A_{\sigma_1\sigma_2} = \exp\left\{\frac{J}{T}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\mu H}{2T}(\sigma_1+\sigma_2)\right\} = \begin{pmatrix} e^{J/T}e^{\mu H/T} & e^{-J/T} \\ e^{-J/T} & e^{J/T}e^{-\mu H/T}\end{pmatrix}.$$

Dann die Zustandssumme ist

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} A_{\sigma_1\sigma_2}A_{\sigma_2\sigma_3}\dots A_{\sigma_N\sigma_1} = \mathrm{Tr}\hat{A}^N.$$

Benutzen wir jetzt die Eigenwerte λ_1 und λ_2

$$\mathrm{Tr}\hat{A}^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N,$$

$$\det\left(\hat{A} - \lambda\hat{1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1(2)} = e^{J/T}\cosh\frac{\mu H}{T} \pm \sqrt{e^{2J/T}\sinh^2\frac{\mu H}{T} + e^{-2J/T}}$$

Jetzt die Korrelationsfuntion:

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left\{\overbrace{\hat{A}\dots\hat{A}}^{i-1}\,\overbrace{\hat{B}\dots\hat{B}}^{n}\,\overbrace{\hat{A}\dots\hat{A}}^{N-i-n+1}\right\} = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left\{\hat{B}^n\hat{A}^{N-n}\right\},$$

wobei

$$B_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1 A_{\sigma_1\sigma_2}\sigma_2.$$

Schreiben jetzt explizit:

$$\hat{A} = a + \mathbf{b}_+\boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{B} = a + \mathbf{b}_-\boldsymbol{\sigma}, \quad a = e^{J/T}\cosh\frac{\mu H}{T}, \quad b_\pm = \left(\pm e^{-J/T}, 0, e^{J/T}\sinh\frac{\mu H}{T}\right).$$

Die folgende Relationen sind hilfbar:

$$F\left(a + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left[F(a+b) + F(a-b)\right] + \frac{1}{2b}\left[F(a+b) - F(a-b)\right]\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{Tr}\left[(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma})\right] = 2\left(\mathbf{ab}\right).$$

Wir finden dann

$$\hat{A}^{N-n} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^{N-n} + \lambda_2^{N-n}\right) + \frac{1}{2b_+}\left(\lambda_1^{N-n} - \lambda_2^{N-n}\right)\mathbf{b}_+\boldsymbol{\sigma},$$

$$\hat{B}^n = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right) + \frac{1}{2b_-}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right)\mathbf{b}_-\boldsymbol{\sigma},$$

Weil $|\lambda_1/\lambda_2| = |(a+b_+)/(a-b_+)| > 1$, vernachlassigen wir die Glieder λ_2^N/λ_1^N und finden

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} + \left(1 - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right)\frac{\mathbf{b}_+\mathbf{b}_-}{b_+^2}\right] = \frac{1}{\sinh^2\frac{\mu H}{T} + e^{-4J/T}}\left[\sinh^2\frac{\mu H}{T} + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}e^{-4J/T}\right]$$

Für $n \to \infty$ haben wir $\lambda_2^n/\lambda_1^n \to 0$. Deswegen

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle\Big|_{n\to\infty} \to \langle\sigma_i\rangle^2 = \frac{\sinh^2\frac{\mu H}{T}}{\sinh^2\frac{\mu H}{T} + e^{-4J/T}}.$$

Letztendlich

$$g(n) = \frac{(\lambda_2^n/\lambda_1^n)e^{-4J/T}}{\sinh^2\frac{\mu H}{T} + e^{-4J/T}}.$$

2. Zweite Quantisierung.

Im Rahmen der thermodynamischen Störungstheorie ist die Korrektur zum großkanonischen Potential durch den Mittelwert gegeben:

$$\delta\Omega = \langle\Psi_0|\widehat{U}|\Psi_0\rangle.$$

Ψ_0 ist die Wellenfunktion des Grundzustandes.

Drücken wir jetzt das Wechselwirkungspotential durch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$:

$$\widehat{U} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4} U_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3,\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_4,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}.$$

Hier

$$U_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = \frac{1}{V^2}\int d^3r_1 d^3r_2 U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\mathbf{r}_1 + i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)\mathbf{r}_2} = \frac{U_0}{V}\delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}.$$

Das δ-Symbol gibt die Impulserhaltung wieder.

Wir müssen jetzt die folgende Mittelwerte berechnen:

$$\langle\Psi_0|\delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3,\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_4,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}|\Psi_0\rangle.$$

Nur die folgende Mittelwerte ungleich null sind:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4,$$

oder

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3,$$

Deswegen

$$\delta\Omega = \frac{U_0}{2V}\langle\Psi_0|\sum_{\sigma_1\sigma_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_2}\right)\hat{a}_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}|\Psi_0\rangle.$$

Wenn $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma} = \{\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\Omega = 0.$$

Wenn $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\delta\Omega = \frac{U_0}{2V}\langle\Psi_0| \sum_{\sigma_1\neq\sigma_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \hat{n}_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}\hat{n}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}|\Psi_0\rangle.$$

Dann benutzen wir

$$\langle\Psi_0|\sum_{\mathbf{k}}\hat{n}_{\mathbf{k},\sigma}|\Psi_0\rangle = \frac{N}{2},$$

und $(\sigma_1 \neq \sigma_2)$

$$\langle\Psi_0|\sum_{\mathbf{k}}\hat{n}_{\mathbf{k},\sigma_1}\hat{n}_{\mathbf{k},\sigma_2}|\Psi_0\rangle = \frac{N}{2}.$$

(sehen Sie auch die Übung 6).

Deswegen

$$\delta\Omega = \frac{1}{4}U_0\frac{N^2}{V}.$$