III. Maxwell-Gleichungen, elektromagnetische Wellen, Strahlung

① Maxwell-Gleichungen

J.C. Maxwell 1861
"On physical lines of force"

Situation vor Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \text{Gauß-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{Faraday-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \text{Ampère-Gesetz}$$

James Clerk Maxwell, 1861: dieses System ist nicht konsistent:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \quad \text{— Widerspruch mit } \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{falls } \partial\rho/\partial t \neq 0)$$

Maxwell hat das Ampère-Gesetz geändert.

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{zusätzlicher Term}} \quad ; \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

Jetzt

$$0 = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=\frac{1}{\epsilon_0}\rho} = \mu_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0$$

→ System der Maxwell-Gleichungen ist mit Ladungserhaltung konsistent

(Ladungserhaltung folgt aus der Maxwell-Gl.)

Maxwell-Gleichungen (im Vakuum)

SI-Einheiten

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j} \end{cases}$$

$$\left[\text{oder } \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right]$$

"Verschiebungsstrom"

in Gauß-Einheiten:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

viel schöner vom theoretischen Ansichtspunkt (keine dimensionsvolle Konstanten außer c; gleiche Dimensionen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ usw).

Heaviside-Lorentz-System: wie im Gauß-S. aber ohne 4π → noch schöner, aber nur selten benutzt.

Für Beschreibung von el/mag Wellen und relativist. Phänomenen ist das Gauß-System besser geeignet → benutzen hauptsächlich das Gauß-System ab diesem Punkt

② Vektor- und Skalar-Potential, Eichtransformationen

(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(2) $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

| zwei homogene Maxwell-Gleichungen

(1) $\leftrightarrow$ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

(2) $\leftrightarrow$ $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$ $\leftrightarrow$ $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$

wurde Φ früher bezeichnet

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}}$$

mit der Darstellung durch das Vektorpotential $\vec{A}$ und das Skalarpotential φ sind beide homogene Maxwell-Gl. automatisch erfüllt.

Die zwei inhomogene Gleichungen lassen sich in folgender Weise durch $\vec{A}$ und φ ausdrücken

$$\begin{cases} -\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = 4\pi\rho \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

4 gekoppelte partielle Differentialgleichungen für 4 Felder $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ und φ

Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\partial\chi/\partial t\end{aligned}$$

| $\chi(\vec{r},t)$ – beliebige Funktion

Eichtransformation

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$(\vec{A}, \varphi)$ und $(\vec{A}', \varphi')$ ergeben die selben $\vec{E}$ und $\vec{B}$!

→ Eichinvarianz

Damit gibt es die Eichfreiheit, die Potentiale zu wählen

Häufig benutzte Eichungen (Bedingungen an die Potentiale):

i) Coulomb-Eichung ("Strahlung-Eichung")
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ oft für Strahlungsprobleme benutzt

ii) Lorenz-Eichung
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
ist am häufigsten benutzt; gleiche Behandlung von $\vec{A}$ und φ ↔ relativistische Invarianz

(!) Lorenz-Eichung ist nach dem dänischen Physiker Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891) benannt. Die Lorentz-Transformationen sind dagegen nach dem holländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928, Nobelpreis 1902) genannt

Lorenz-Eichung

Für beliebige $\vec{A}(r,t)$ und $\varphi(r,t)$ kann man eine Eichtransformation finden, so dass $\vec{A}'$ und φ' die Lorenz-Eichung genügen:

$\vec{A}, \varphi$; $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$; wir fordern $\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad \text{Wellengleichung}$$

Wir werden später zeigen, dass diese Gleichung immer gelöst werden kann.

Die Lorenz-Bedingung eliminiert die Eichfreiheit noch nicht vollständig:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{Lorenz-E}$$

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0$$

$\Big\rightarrow$ auch $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$

Analog für Coulomb-Eichung:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Coulomb-E.), $\nabla^2\chi = 0 \rightarrow$ auch $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$

Inhomogene Maxwell-Gl., Lorenz-Eichung:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Die Gleichungen (für $\vec{A}$ und φ) haben sich entkoppelt!

→ 4 (skalare) Wellengleichungen für φ, A_x, A_y, A_z

Inhomogene Maxwell-Gl., Coulomb-Eichung

(1) $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ Poisson-Gl.

(2) $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$

(1) Poisson-Gl. $\rightarrow$ $\varphi(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(2): $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_\perp(\vec{r}) + \vec{j}_\parallel(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp(\vec{r}) = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel(\vec{r}) = 0$

jedes Vektorfeld, das in ∞ abklingt, kann so zerlegt werden

(im Fourier-Darstellung sind $\vec{j}_\perp$ und $\vec{j}_\parallel$ transversal bzw. longitudinal bezüglich des Wellenvektors)

$\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\parallel$ – folgt aus

$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0$ und $\vec{\nabla}\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\vec{j}$

$\Rightarrow$ die rechte Seite der Gl. (2) ist $-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp$:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp$$

Sowohl in Lorenz als auch in Coulomb – Eichungen reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen zu Wellengleichungen mit der Struktur

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -4\pi f$$

Entsprechende Lösungen werden wir unten analysieren

(3) Energie- und Impuls- Erhaltung, Poynting-Vektor

Energie-Bilanz

Wir betrachten ein System, das aus el/mag Feldern $\vec{E},\vec{B}$ und geladenen Teilchen ($\rightarrow$ Stromdichte $\vec{j}$) besteht

$$dW_{mat} = \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_i \, dt = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{v}_i \, dt$$

Arbeit geleistet von den el/mag Feldern an Ladungen
→ Änderung der Energie von Ladungen ("Materie")

$$\frac{dW_{mat}}{dt} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i, t) \vec{v}_i \rightarrow \int d^3r \, \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\equiv \int d^3r \, \vec{E}\vec{j}$$

Energie-Erhaltung → $\frac{dW_{mat}}{dt}$ muß durch eine entsprechende Änderung der Energie von el/mag Feldern kompensiert werden

$$\vec{B} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\right]$$

$$- \vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{c} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)} = - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \underbrace{- \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) + \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)}_{= - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} = - \vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

$w_{em} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}$ – Energiedichte des el/mag. Feldes

früher hatten in SI:
$w_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ – Poynting-Vektor

Natürlich $\vec{S} \equiv \vec{S}(\vec{r}, t)$; $w_{em} \equiv w_{em}(\vec{r}, t)$

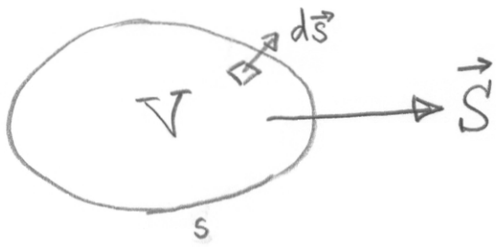
$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

Poynting-Satz (Theorem)

Energie-Bilanz:

- Änderung der Energie des e/m Feldes
- Energie-Stromdichte
- Umwandlung der Energie des e/m Feldes in die Energie von Teilchen

Integralform der Energiebilanz.



$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, w_{em} + \int_V d^3r\, \vec{j}\cdot\vec{E} = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt}\left(W_{em} + W_{mat}\right) = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{S}$$

Das ist der Energie-Erhaltungssatz, der zeigt, dass $\vec{S}$ die Energiestromdichte darstellt.

Impuls-Bilanz

$$\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i\left(\vec{E}_i + \frac{\vec{v}_i}{c}\times\vec{B}_i\right)$$

$$\rightarrow \int d^3r\left(\rho\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right)$$

Benutzen: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$; $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int d^3r \left[\vec{E}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + c\,\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} + \frac{d}{dt}\int d^3r\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi}\int d^3r \left[\vec{E}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \vec{B}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \right]$$

↖ haben addiert; ist $=0$, da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\left[\vec{E}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \right]_j = E_j \sum_i \nabla_i E_i - \sum_{klmp} \epsilon_{jkl}\,\epsilon_{lmp}\,E_k \nabla_m E_p$$

$$= E_j \sum_i \nabla_i E_i - \sum_{kmp} (\delta_{jm}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{km})\,E_k \nabla_m E_p$$

$$= E_j \sum_i \nabla_i E_i - \sum_k \left(E_k \nabla_j E_k - E_k \nabla_k E_j \right)$$

$$= \sum_k \left(E_j \nabla_k E_k - E_k \nabla_j E_k + E_k \nabla_k E_j \right)$$

$$= \sum_k \nabla_k \left(E_j E_k - \frac{1}{2}\delta_{jk}\vec{E}^2 \right) \qquad \text{und analog für } \vec{B}$$

$$\boxed{T_{jk} = \frac{1}{4\pi}\left[E_j E_k + B_j B_k - \frac{\delta_{jk}}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \right]}$$

Maxwell'scher Spannungstensor

$T_{jk} = T_{kj}$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} + \frac{d}{dt}\int d^3r\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} \right]_j = \int d^3r \sum_k \nabla_k T_{jk}$$

Diese Gleichung hat die Struktur eines Erhaltungssatzes: **Impuls-Erhaltungssatz**

$$\int d^3r \, \frac{\bar{E}\times\bar{B}}{4\pi c} = \vec{P}_{em} \quad - \text{Impuls des el/mag Feldes}$$

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} = \frac{1}{c^2}\vec{S} \quad - \text{Impulsdichte des el/mag Feldes}$$

$$\left[\frac{d\vec{P}_{mat}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{em}}{dt}\right]_j = \int_V d^3r \sum_k \nabla_k T_{jk}$$

$$= \oint_{S(V)} ds_k T_{jk}$$

$-T_{jk}$ – Impulsstromdichte des el/mag Feldes
(k – Komponente der Stromdichte von P_j)

In der differ. Form:

$$\left(\vec{\rho}\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} + \frac{\partial \vec{g}_{em}}{\partial t}\right)_j = \sum_k \nabla_k T_{jk}$$

(4) Elektromagnetische Wellen

Theorie: Maxwell, 1864 "A dynamical theory of the el/mag field"
Exp. Entdeckung: Heinrich Hertz, 1887 (in Karlsruhe)

Maxwell-Gl. in $\varphi, \vec{A}$ – Darstellung, Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

(1) $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$

(2) $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$

$= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp$ wenn die natürliche Lösung für (1) gewählt wird, so dass φ in ∞ abklingt

$\vec{j} = \vec{j}_\parallel + \vec{j}_\perp$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel = 0$

Im freien Raum (keine Ladung- und Strom-Quellen)

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Natürliche Lösung: $\varphi = 0$,

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0}$$

(alle andere sind durch Eichtransformationen verbunden und damit äquivalent)

$$\Box f \equiv \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

d'Alambert-Gleichung (Wellengleichung)

gilt für jede von 3 Komponenten A_x, A_y, A_z

1D Lösungen der Wellengleichung

$\Box f = 0$

Wir nehmen an, dass $f = f(x,t)$ (nur von einer Koordinate abhängig)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

$f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ mit beliebigen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$

$f_1(x)$, $f_2(x)$ - Wellenpakete, die sich mit Geschwindigkeit c in $+x$ bzw $-x$ Richtung ausbreiten

Fourier-Entwicklung

$$f_j(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_j(k)\, e^{ikx} \qquad j = 1,2$$

$f_j(x)$ reell $\longrightarrow$ $\tilde{f}_1(k) = \tilde{f}_1^*(-k)$

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k)\, e^{ik(x-ct)} + \tilde{f}_2(k)\, e^{ik(x+ct)} \right]$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \left[\tilde{f}_1(k)\, e^{i(kx-\omega t)} + \tilde{f}_2(k)\, e^{i(kx+\omega t)} \right], \quad \underline{\omega = ck}$$

Harmonische Lösungen (ebene Wellen)

$$f(x,t) = \mathrm{Re}\, f^{(c)}(x,t) \quad ; \quad f^{(c)}(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}, \quad \omega = \pm ck$$

(c): "complex"

$\mathrm{Re}\, e^{i(kx-\omega t)} = \mathrm{Re}\, e^{-i(kx-\omega t)}$ $\Rightarrow$ es reicht, wenn man nur die Lösungen $f^{(c)}(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ mit $\underline{\omega > 0}$ betrachtet

$$\underline{\omega = c|k|}$$

Dann entspricht $k>0$ der Rechtsausbreitung ($\omega = ck > 0$)
und $k<0$ der Linksausbreitung ($\omega = -ck > 0$)

$$f(x,t) = \mathrm{Re}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad \omega = c|k| \quad - \underline{\text{ebene Welle}}$$

(Oft schreibt man Re explizit nicht und gibt komplexe Lösungen an; es wird aber dabei impliziert, dass das physikalische Feld den Realteil Re f ist)

Ebene Wellen in 3D:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Ebene Wellen: $f(\vec{r},t) = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ $\qquad \omega = c|\vec{k}| > 0$

↑ Re implizit

El/mag. ebene Wellen

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \qquad \omega = c|\vec{k}| \equiv ck$$

$\vec{A}_0$: konstanter Vektor, allgemein komplex (Amplitude der Welle)

$|\vec{k}|$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{A}_0 \cdot \vec{k} = 0}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = +i\frac{\omega}{c}\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = ik\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{E}_0 = ik\vec{A}_0$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}_0 = i\vec{k}\times\vec{A}_0$$

$\vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0$ (folgt aus $\vec{A}_0\cdot\vec{k}=0$)
$\vec{B}_0\cdot\vec{k} = 0$ (folgt aus $\vec{B}_0 = i\vec{k}\times\vec{A}_0$)
$\rightarrow \vec{E}_0, \vec{B}_0 \perp \vec{k}$

$\vec{E}(\vec{r},t) \perp \vec{k}$
$\vec{B}(\vec{r},t) \perp \vec{k}$
$\rightarrow$ el/mag Wellen sind <u>transversal</u>

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}(\vec{r},t) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{B}(\vec{r},t)| = |\vec{E}(\vec{r},t)| \\ \vec{B}(\vec{r},t) \perp \vec{E}(\vec{r},t) \end{cases}$$

Alle diese Eigenschaften gelten auch für $\mathrm{Re}\,\vec{E}$, $\mathrm{Re}\,\vec{B}$, also für die physikalischen (reellen) Felder

$\vec{k}$ – Wellenvektor – bestimmt die Ausbreitungsrichtung der Welle:

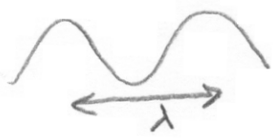
- Phasenfläche $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$ verschiebt sich mit der Geschwindigkeit $c = \omega/k$ in Richtung von $\frac{\vec{k}}{k}$
- Energiestromdichte (Poynting-Vektor)
  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{k}$ $\Rightarrow$ $\vec{k}$ ist die Richtung des Energietransports

$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$ $\Rightarrow$ transversale Welle

$|\vec{E}(\vec{r},t)| = |B(\vec{r},t)|$ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben Maxima an denselben Stellen (und auch gleiche Nullstellen)

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind in Phase

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ – Wellenlänge



$[\lambda]$ = Länge

ω – (Kreis-) Frequenz

$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$ – Frequenz im engeren Sinn (Anzahl von Oszillationen pro Zeiteinheit)

$[\nu] = \frac{1}{\text{Zeit}}$; wird im $\text{Hz} = s^{-1}$ gemessen (Hertz)

(5) Polarisation: lineare, zirkulare, elliptische

Wir betrachten ebene Wellen, d.h. mit gegebenem $\vec{k}$ (allgemeine Lösung der Wellengleichung für $\vec{A}$ ist eine Überlagerung von solchen (ebenen) Wellen)

Wir wählen die z-Achse in Richtung von $\vec{k}$

$$\vec{A}(r,t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \vec{A}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

Wir betrachten erst die Situation eines reellen Polarisationsvektor $\vec{A}_0$ (allgemeiner: $\vec{A}_0 = e^{i\alpha} \cdot$ reeller Vektor)

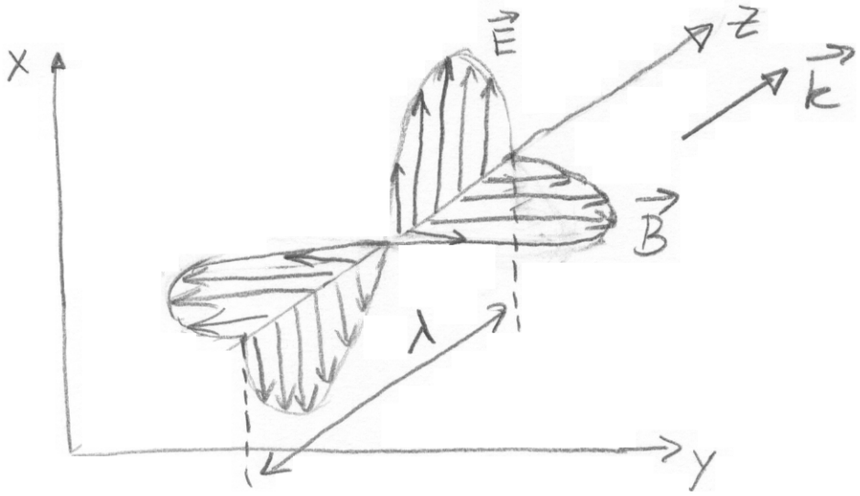
Wir können die x-Achse in Richtung von $\vec{A}_0$ wählen

$$\vec{A}_0 = A_0 e_x, \quad A_0 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \xrightarrow{Re} A_0 \vec{e}_x \cos(kz-\omega t)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = ikA_0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \xrightarrow{Re} -kA_0 \vec{e}_x \sin(kz-\omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = ikA_0 \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y} e^{i(kz-\omega t)} \xrightarrow{Re} -kA_0 \vec{e}_y \sin(kz-\omega t)$$



lineare Polarisation

Allgemeine Situation:

$\vec{E}_0$ - komplex, $\vec{E}_0 = \vec{a}_1 + i\vec{a}_2 = e^{i\alpha}(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)$

($\vec{a}_1, \vec{a}_2$ reell; $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ reell)

Die Phase α kann hier beliebig gewählt werden; wird später festgelegt

$$\vec{E}_0^{\,2} \equiv \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = |\vec{E}_0^{\,2}| e^{i\delta} = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2 e^{2i\alpha}$$

↳ Skalarprodukt definiert ohne komplexer Konjugation

Wir wählen $\alpha = \delta/2$

$$\Rightarrow |\vec{E}_0^{\,2}| = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2 = \vec{b}_1^{\,2} + 2i\,\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 - \vec{b}_2^{\,2}$$

reell

$$\Rightarrow \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{b}_1\cdot\vec{k} = 0, \quad \vec{b}_2\cdot\vec{k} = 0$$

Falls $\vec{b}_1 = 0$ oder $\vec{b}_2 = 0$, die Welle ist linear polarisiert

Sonst definieren wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{b_1}, \quad \vec{e}_2 = \mp\frac{\vec{b}_2}{b_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k}$$

Das Vorzeichen ist so gewählt, dass $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$.

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (b_1\vec{e}_1 \mp i b_2 \vec{e}_2)\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)}$$

$$\rightarrow (b_1\vec{e}_x \mp i b_2 \vec{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

(α: kann durch Redefinition des Ursprungs $t=0$ eliminiert werden)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{e}_z \times \vec{E}$$

$$\rightarrow (b_1\vec{e}_y \pm i b_2 \vec{e}_x)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Physikalische (reelle) Felder:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_x b_1 \cos(kz-\omega t) \pm \vec{e}_y b_2 \sin(kz-\omega t)$$

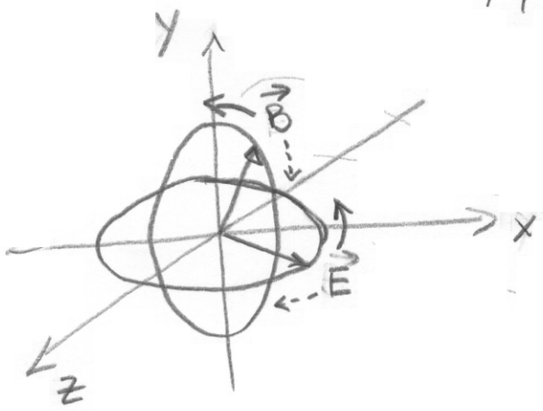
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{e}_y b_1 \cos(kz-\omega t) \mp \vec{e}_x b_2 \sin(kz-\omega t)$$

Damit beschreibt $\vec{E}$ (an einem festen Raumpunkt) eine Ellipse in (x,y)-Ebene:

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1$$

und $\vec{B}$ eine um $\pi/2$ verdrehte Ellipse

$$B_x^2/b_2^2 + B_y^2/b_1^2 = 1$$



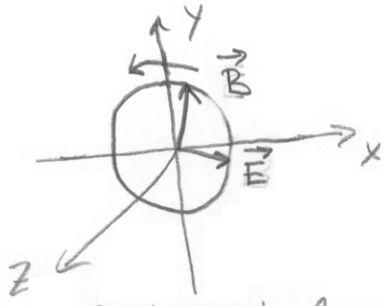
elliptische Polarisation

Rotationsrichtung: je nachdem, welches Vorzeichen in ±

Spezialfälle:

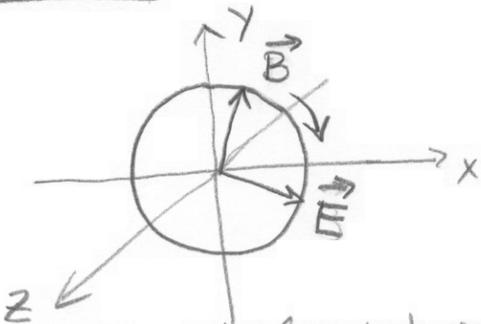
$b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$ → lineare Polarisation (siehe oben)

$b_1 = b_2$ → zirkulare Polarisation



linkszirkular polarisiert

$\frac{\vec{k}}{k} = \vec{e}_z$



rechtszirkular polarisiert

Eine allgemeine (elliptische) Polarisation kann als Überlagerung der beiden linear polarisierten ($\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ und $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$) oder der beiden zirkular polarisierten (links und rechts) Lösungen dargestellt werden.

Energie-Dichte und -Fluß

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\, \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B} = \mathrm{Re}\, \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$w_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ Energiedichte

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

an einem bestimmten Ort oszillieren mit Zeit t

→ wir berechnen zeitgemittelten Größen

Fuer $\vec{a} = \mathrm{Re}\,\vec{a}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \frac{1}{2}\left[\vec{a}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \vec{a}_0^{\,*} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]$

$\vec{b} = \mathrm{Re}\,\vec{b}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \frac{1}{2}\left[\vec{b}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \vec{b}_0^{\,*} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]$

$$\langle \vec{a}\cdot\vec{b}\rangle = \frac{1}{4}\langle \vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^{\,*} + \vec{a}_0^{\,*}\cdot\vec{b}_0 + \dots\rangle$$

↑ oszilliert $\sim e^{\pm 2i\omega t}$ und damit fällt weg bei der Mittlung

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{a}_0\cdot\vec{b}_0^{\,*}\right)$$

$$\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{16\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^{\,*} + \vec{B}_0\cdot\vec{B}_0^{\,*}\right) = \frac{1}{8\pi}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^{\,*} = \frac{1}{8\pi}\vec{B}_0\cdot\vec{B}_0^{\,*}$$

reell und gleich, da $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}$

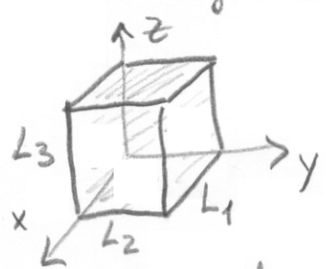
$$\langle \vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,\vec{E}_0\times\vec{B}_0^{\,*} = \langle w_{em}\rangle c\,\frac{\vec{k}}{k}$$

↑ $\vec{e}_z\times\vec{E}_0^{\,*}$

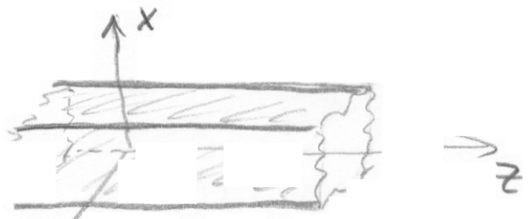
Die Welle transportiert ihre Energie mit Geschwindigkeit c in Richtung von $\vec{k}$.

⑥ Hohlraumwellen: Hohlraumresonatoren und Wellenleiter

Wir untersuchen el/mag Wellen in einem Volumen, das durch Metallwände begrenzt wird.
Innerhalb des Volumens: freie Maxwell-Gl.
Auf der Grenzfläche: Randbedingungen
Zwei wichtige Arte:



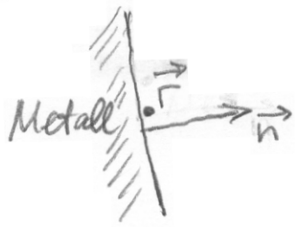
Hohlraumresonator (geschlossene Metallfläche)



Wellenleiter [in einer Richtung (hier z) unbegrenzt]

Wir werden hier den Metall als ein idealer Leiter betrachten (Leitfähigkeit $\sigma \to \infty$).

Randbedingungen



$\sigma \to \infty \Rightarrow$ frei bewegliche Ladungen, die sich unendlich schnell anpassen können $\Rightarrow \vec{E} = 0$ im Metall

Stetigkeit von $\vec{E}_{\parallel}$ ($\parallel$ parallel zu Oberfläche) $\Rightarrow$ $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r},t) = 0$ an der Grenze mit Metall

oder, äquivalent: $\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{n} = 0$ (1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\vec{B} \Rightarrow B_{\perp}(\vec{r},t) \equiv \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{n} = 0 \quad (2)$$

Für realistische Metalle ($\sigma < \infty$) diese Randbedingungen sind Idealisierungen; die tatsächliche Situation wird später noch diskutiert. Die $\sigma \to \infty$ Näherung ist gut für nicht zu hohe Frequenzen (z.B. für Radiofrequenzen)

Wir wollen also die freien Maxwell-Gl. lösen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

mit Randbedingungen (1), (2) an der Grenzfläche mit Metall

Benutzen $\nabla^2\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{-\frac{1}{c}\partial\vec{B}/\partial t}) + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0})$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0}$$

Völlig analog für $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = 0}$$

Hohlraumresonator

Betrachten einen Quader $0 \le x \le L_1$, $0 \le y \le L_2$, $0 \le z \le L_3$

Separationsansatz für E_x

$$E_x(x,y,z,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -k_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_3^2, \quad \frac{T''}{T} = -\omega^2$$

$$\omega^2 = c^2\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)$$

Randbedingungen $\rightarrow$ nur rein oszillierende Lösungen,

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

$$X'' = -k_1^2 X \Rightarrow \quad X(x) = a\sin(k_1 x + \alpha_1)$$

$$\equiv b\sin k_1 x + c\cos k_1 x$$

$$\equiv d\,e^{ik_1 x} + f\,e^{-ik_1 x}$$

Für X, Y, Z verwenden wir die erste Form.

$$E_x = \mathrm{Re}\left[C_1 \sin(k_1 x + \alpha_1)\sin(k_2 y + \alpha_2)\sin(k_3 z + \alpha_3)\,e^{-i\omega t}\right]$$

↑ im Allgemeinen komplex; schreiben unten nicht, um die Schreibweise zu vereinfachen

Randbedingungen $\rightarrow E_x = 0$ an Wänden $y=0$, $y=L_2$, $z=0$, $z=L_3$

$\Rightarrow k_2 = m\pi/L_2$, $k_3 = n\pi/L_3$; $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$E_x = C_1 X(x) \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$

$X(x) = \sin(k_1 x + \alpha_1)$

Das gleiche Verfahren ergibt für E_y und E_z:

$$E_y = C_2 Y(y) \sin\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t}$$

$$E_z = C_3 Z(z) \sin\frac{l'\pi x}{L_1} \sin\frac{m'\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t}$$

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = C_1 \frac{dX(x)}{dx} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$
$$+ C_2 \frac{dY(y)}{dy} \sin\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t}$$
$$+ C_3 \frac{dZ(z)}{dz} \sin\frac{l'\pi x}{L_1} \sin\frac{m'\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega' = \omega'', \quad l = l', \quad m = m', \quad n = n',$$

$$\frac{dX(x)}{dx} \propto \sin\frac{l\pi x}{L_1} \quad \Rightarrow \quad X(x) = \cos\frac{l\pi x}{L_1}$$

wir können hier den Koeffizient $=1$ wählen, da C_1 noch nicht festgelegt wurde

Entsprechend $Y(y) = \cos\frac{m\pi y}{L_2}$, $Z(z) = \cos\frac{n\pi z}{L_3}$

$\rightarrow$

$$E_x = C_1 \cos\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$
$$E_y = C_2 \sin\frac{l\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} \sin\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$
$$E_z = C_3 \sin\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \cos\frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t}$$

$l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$

maximal eine Zahl von (l, m, n) darf null sein (sonst wäre $\vec{E} = \vec{B} = 0$).

$\omega^2 = c^2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$

$$\omega = c\pi\sqrt{\frac{l^2}{L_1^2}+\frac{m^2}{L_2^2}+\frac{n^2}{L_3^2}} \equiv \omega_{lmn}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad\Rightarrow\quad C_1\frac{l\pi}{L_1}+C_2\frac{m\pi}{L_2}+C_3\frac{n\pi}{L_3}=0$$

$\Rightarrow$ zwei von Amplituden C_1, C_2, C_3 können frei gewählt werden

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = -\frac{ic}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

$$B_x = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{C_3 m\pi}{L_2}-\frac{C_2 n\pi}{L_3}\right)\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2}\cos\frac{n\pi z}{L_3}\, e^{-i\omega t}$$

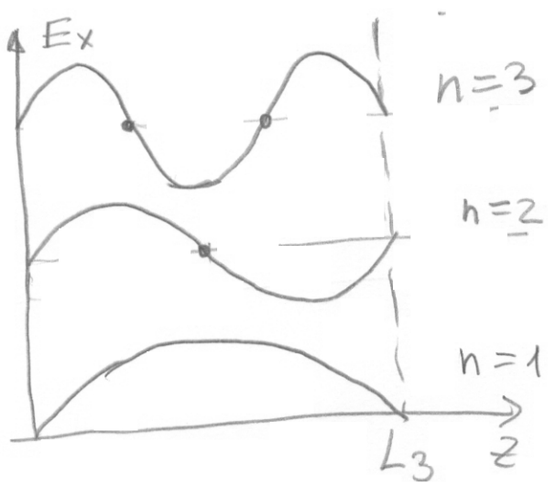
und entsprechend für B_y und B_z

Randbedingungen $B_x = 0$ auf den Flächen $x=0$ und $x=L_1$ sind erfüllt (und analog für B_y und B_z).

Alle Maxwell-Gleichung sind auch erfüllt.

Die gefundene Lösungen $\vec{E}(x,y,z)$, $\vec{B}(x,y,z)$ – Eigenmoden (Eigenschwingungen) des Hohlraumresonators, ω_{lmn} – Eigenfrequenzen

Die Eigenmoden haben Charakter von stehenden Wellen



$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2L_3}{n}$$

Wellenleiter

Wir betrachten einen Wellenleiter mit einem rechteckigen Querschnitt $0 \le x \le L_1$, $0 \le y \le L_2$; in z-Richtung unbegrenzt.

→ der gleiche Separationsansatz, aber jetzt mit $Z(z) = e^{\pm ikz}$, $k \equiv k_3$ kontinuierlich

→

$$E_x = C_1 \cos\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_y = C_2 \sin\frac{l\pi x}{L_1} \cos\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_z = C_3 \sin\frac{l\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

Für $k>0$ bewegt sich die Welle in $+z$ Richtung

$$\omega^2 = c^2\left(\frac{\pi^2 l^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_2^2} + k^2\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow C_1\frac{l\pi}{L_1} + C_2\frac{m\pi}{L_2} - iC_3 k = 0 \quad (*)$$

$$\vec{B} = -\frac{ic}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

→

$$B_z = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{C_2 l\pi}{L_1} - \frac{C_1 m\pi}{L_2}\right)\cos\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$B_x = -\frac{ic}{\omega}\left(\frac{C_3 m\pi}{L_2} - C_2 ik\right)\sin\frac{l\pi x}{L_1}\cos\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$B_y = -\frac{ic}{\omega}\left(C_1 ik - \frac{C_3 l\pi}{L_1}\right)\cos\frac{l\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)}$$

Alle Maxwell-Gl. und Randbedingungen sind erfüllt.

Bei freien el/mag Wellen hatten wir $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$; also für eine Welle mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ $E_z = B_z = 0$

→ TEM-Wellen (transversales elektr. und mag. Feld)

Für den Wellenleiter mit einem rechteckigen Querschnitt (und auch allgemein für einfach zusammenhängende Geometrien) existieren TEM-Moden nicht

Beweis: $E_z = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \overset{(*), S.80}{\Longrightarrow} C_1 \frac{l\pi}{L_1} + C_2 \frac{m\pi}{L_2} = 0$

$B_z = 0 \Rightarrow \frac{C_2 l\pi}{L_1} - \frac{C_1 m\pi}{L_2} = 0$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 - C_2 = 0$

oder $l=0 \Rightarrow C_1 m = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

F. existieren TE ($E_z = 0$) und TM ($B_z = 0$) Moden. Man kann zeigen, dass sie ein vollständiges System bilden. (Für mehrfach zusammenhängende Geometrien, wie z.B. ein Koaxialkabel, existieren auch TEM-Moden)



TE-Moden

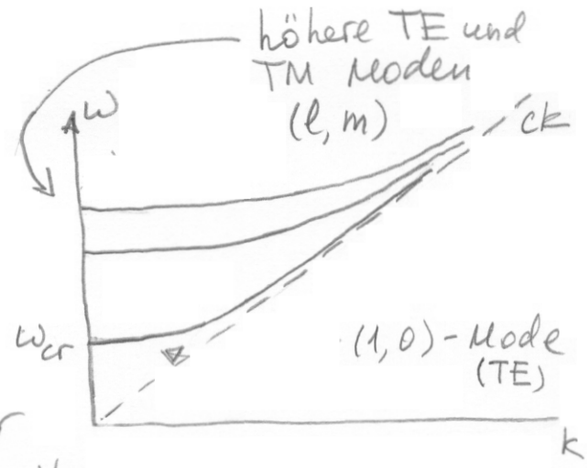
$E_z = 0$, $B_z \neq 0$ $\Longrightarrow$ $l = m = 0$ nicht erlaubt

Alle anderen Paare (l, m) von $l = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$ sind erlaubt

Für $L_1 > L_2$ die niedrigste Frequenz ω entspricht $(l, m) = (1, 0)$

$$\omega = c\sqrt{\frac{\pi^2}{L_1^2} + k^2}$$

$$\omega > \omega_{cr} = c\pi/L_1$$



Im Wellenleiter kann sich eine Welle nur oberhalb der kritischer Frequenz ausbreiten

TM-Moden

$B_z = 0$, $E_z \neq 0$ $\rightarrow$ $l \neq 0$ und $m \neq 0$

(7) Green'sche Funktion der Wellengleichung, Retardierte Potentiale

Lorenz Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

Maxwell-Gl. $\rightarrow$ $\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

haben die Struktur eines inhomogenen Wellengleichung

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f$$

$\psi = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$
$f = (\rho, j_x/c, j_y/c, j_z/c)$

Wir definieren die Green'sche Funktion

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

Dann die Lösung lautet

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3r'\,dt'\, G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')\, f(\vec{r}', t') + \psi_0(\vec{r}, t)$$

wobei $\nabla^2\psi_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2} = 0$

Um die Green'sche Funktion zu bestimmen, verwenden wir die Foerier-Transformation

(*) $\psi(\vec{r},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\psi}(\vec{r},\omega) e^{-i\omega t}$ (**) $f(\vec{r},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\vec{r},\omega) e^{-i\omega t}$

$\tilde{\psi}(\vec{r},\omega) = \int dt\, \psi(\vec{r},t) e^{i\omega t}$ $\tilde{f}(\vec{r},\omega) = \int dt\, f(\vec{r},t) e^{i\omega t}$

Einsetzen von (*) und (**) in die inhomogene Wellengleichung

$$\rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\psi}(\vec{r},\omega) = -4\pi \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\vec{r},\omega)$$

$$\rightarrow \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\psi}(\vec{r},\omega) = -4\pi \tilde{f}(\vec{r},\omega)$$ Helmholtz-Gleichung

~ ! Notationen! In physikalischer Literatur bezeichnet man üblicherweise die ursprüngliche und die Foerier-transformierte Funktion mit gleichem Symbol:

$\psi(\vec{r},t) \xrightarrow{\text{Foerier}} \psi(\vec{r},\omega)$

Green-Funktion der Helmholtz-Gl.:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G_k(\vec{r}\,\vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{R}$ $|\vec{R}| \rightarrow$

G_k muß kugelsymmetrisch sein: $G_k(\vec{r},\vec{r}') = G_k(\vec{R}) = G_k(R)$

$$\nabla^2 \xrightarrow{\text{kugelsymm.}} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \frac{d}{dR} \equiv \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} R$$

Außer an $R = 0$ erfüllt G_k die Gleichung $(\nabla^2 + k^2) G_k(R) = 0$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} R + k^2\right) G_k(R) = 0$$

$$\frac{d^2}{dR^2}\left[R G_k(R)\right] + k^2 R G_k(R) = 0$$

$$R G_k(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR}$$

In der Nähe der Singularität $R \to 0$ reduziert sich die Gleichung $(\nabla^2 + k^2) G_k = -4\pi\delta(\vec{R})$ zu Poisson-Gl $\nabla^2 G_k = -4\pi\delta(\vec{R})$ $(kR \ll 1)$

$$\Rightarrow \quad G_k(R)\Big|_{R\to 0} \simeq \frac{1}{R} \qquad (\text{formal } \lim_{R\to 0} R\,G_k(R) = 1)$$

$$\Rightarrow \quad G_k(R) = A\,G_k^+(R) + B\,G_k^-(R)$$

$$G_k^{\pm}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}, \qquad A+B=1$$

Beide G_k^+ und G_k^- sind Green'sche Funktionen der Helmholtz-Gl. (und eine lineare Funktion von den mit $A+B=1$ ist auch eine G.F.) Welche G.F. gewählt werden soll hängt von den zeitlichen Randbedingungen des physikalischen Problem ab. Um das zu verstehen, gehen wir zurück zur Zeitdarstellung und bilden die entsprechende G.F.

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

Fourier $t \to \omega$

$$\left(\nabla_r^2 + k^2\right) G(\vec{r},\omega,\vec{r}',t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')e^{i\omega t'} \qquad \boxed{k \equiv \frac{\omega}{c}}$$

Greensche Funktionen

$$G^{\pm}(\vec{r},\omega,\vec{r}',t') = \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{i\omega t'} = \frac{e^{i\omega\left(t' \pm \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right)}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Fourier-Rücktransformation $\omega \to t$

$$G^{\pm}(\vec{r},t,\vec{r}',t') = \frac{\delta(t-t' \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\boxed{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} = \delta(t)}$$

Damit finden wir die Lösung der Wellengleichung

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f$$

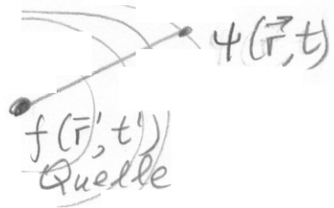
ψ_0: Lösung der homogenen Gleichung

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r'\,dt'\, G(\vec{r},t,\vec{r}',t')\, f(\vec{r}',t') + \psi_0(\vec{r},t)$$

- setze den Ausdruck für $G^{\pm}$ ein
- integriere $\int dt'$

$$= \int d^3r' \frac{f(\vec{r}', t \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \psi_0(\vec{r},t)$$

- G^+ (oberes Vorzeichen) – retardierte G.F.
  → retardierte Lösung: $\psi(\vec{r},t)$ hängt nur von $f(\vec{r}',t')$ zu früheren Zeiten $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} < t$ ab.
  → Kausalität
  $t > t'$



- G^- (unteres Vorzeichen) – avancierte G.F.
  $t < t'$

Übliche physikalische Fragestellung: Strahlung von Ladungen / Strömen → retardierte Lösung

Retardierte Potentiale

$$\varphi(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

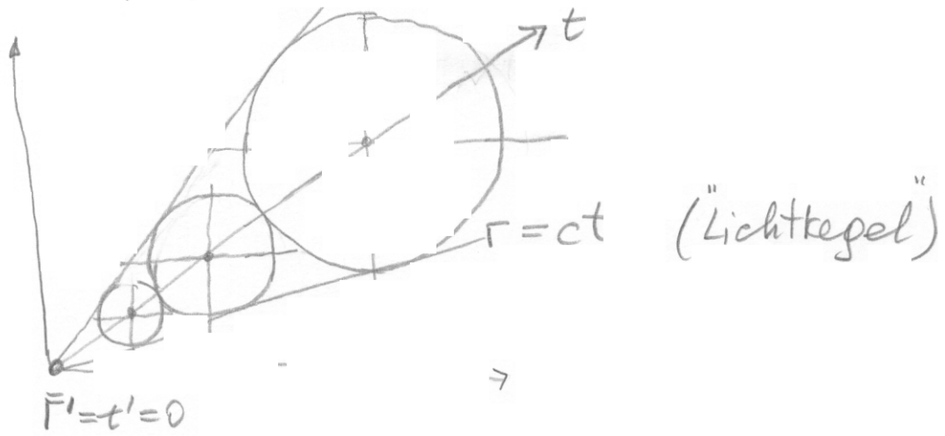
$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Lorenz-Eichung
OK

Wir haben die homogene Lösung $(\psi_0, \vec{A}_0) = 0$ gewählt,

d. h. das el/mag Feld existiert nur wegen der Quelle $(\rho, \vec{j})$.



(8) Strahlung

Wir berechnen die el/mag Strahlung, die von einer oszillierenden (harmonischen) Ladungs- und Stromverteilung verursacht wird.

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \qquad (*)$$



$\underbrace{\vec{E}\ \vec{B}}$ Wir wollen die el/mag Felder in großem Abstand von Quelen zu finden. Dafür reicht es das Vektorpotential $\vec{A}(r)$ zu bestimmen (für $\omega \neq 0$):

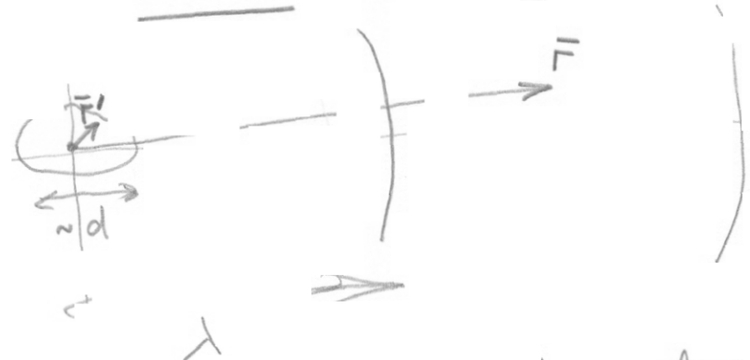
$$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \longrightarrow \vec{E} = \frac{ic}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$
$$= (i/k)\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = 0 \quad \text{außerhalb von Quellen}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{(*)}{=\!=} \vec{A}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad k \equiv \omega/c$$

Wir nehmen an, dass die lineare Ausdehnung der Quelle d klein gegenüber der Wellenlänge ist: $\underline{d \ll \lambda} \iff kd \ll 2\pi$



Man muß zwischen zwei Bereichen unterscheiden:

- $r \ll \lambda \iff kr \ll 2\pi$ die Nahzone (statische Zone), das Nahfeld
- $r \gg \lambda \iff kr \gg 2\pi$ die Fernzone (Strahlungszone, Wellenzone) das Fernfeld

Nahzone

$$\left.\begin{array}{l} kr' \lesssim kd \ll 2\pi \\ kr \ll 2\pi \end{array}\right| \Rightarrow k|\vec{r}-\vec{r}'| \ll 2\pi$$

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')\, e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Analog: $\varphi_0(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$; $\varphi(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\rightarrow$ Elektro- / Magnetostatik;
quasistatisches Feld, Retardierung vernachlässigbar

Fernzone

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \gg \frac{2\pi}{k} \gg r' \qquad O\left(\frac{r'^2}{r}\right)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r - \vec{n}\cdot\vec{r}' + \dots \qquad \vec{n} = \vec{r}/r$$

$$\rightarrow \vec{A}_0(\vec{r}) \simeq \frac{e^{ikr}}{cr} \underbrace{\int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}'}}_{\equiv \vec{g}(k\vec{n})} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla}e^{ikr}}{cr}\times\vec{g}(k\vec{n}) + O(1/r^2)$$

$$\vec{\nabla}e^{ikr} = ike^{ikr}\vec{\nabla}r = ike^{ikr}\vec{n}$$

$$= \frac{ike^{ikr}}{cr}\,\vec{n}\times\vec{g} + O(1/r^2)$$

Kommentar: der führende Term hier kriegt man, wenn $\vec{\nabla}$ auf e^{ikr} wirkt, wegen $kr \gg 1$

z.B.: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikx}}{x} = \frac{e^{ikx}}{x}\left(ik - \frac{1}{x}\right) = \frac{ike^{ikx}}{x}\left(1 + \frac{i}{kx}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}}{x}\left(1 + O\left(\frac{1}{kx}\right)\right)$

$$\vec{E}_0 = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}_0 = -\frac{ike^{ikr}}{cr}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{g}) + O(1/r^2)$$

$$\rightarrow \vec{A}_0 \simeq \frac{e^{ikr}}{cr}\vec{g}\,; \quad \vec{B}_0 \simeq \frac{ike^{ikr}}{cr}\,\vec{n}\times\vec{g}\,; \quad \vec{E}_0 \simeq -\frac{ike^{ikr}}{cr}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{g})$$

$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}$, $\vec{E} \simeq -\vec{n}\times\vec{B}$ – analog zu einer ebenen Welle

Hier haben wir aber Kugelwellen $\propto \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$:



Strahlungsleistung

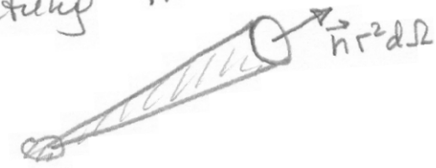
$\langle\vec{S}\rangle$ – zeitgemittelter Poyntingvektor

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{B}\right\rangle = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0^{\,*}\times\vec{B}_0\right)$$

$$= -\frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left((\vec{n}\times\vec{B}_0^{\,*})\times\vec{B}_0\right) = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left[\vec{n}\,\underbrace{(\vec{B}_0^{\,*}\cdot\vec{B}_0)}_{\text{reell}} - \vec{B}_0^{\,*}\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{B}_0)}_{=0}\right]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \vec{n} \left(\vec{B}_0^* \cdot \vec{B}_0 \right) = \frac{k^2 \vec{n}}{8\pi c r^2} \left| \vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n}) \right|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Die (zeitgemittelte) Leistung abgestrahlte in den Raumwinkel $d\Omega$ in Richtung $\vec{n}$



$$dP = \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n} \cdot r^2 d\Omega$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} \left| \vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n}) \right|^2}$$

Kommentar: das Verhalten $E, B \propto 1/r$ ist charakteristisch für Strahlungsfelder. Es führt dazu, dass $\langle \vec{S} \rangle \propto 1/r^2$ und damit $\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n} r^2$ im Limes $r \to \infty$ unabhängig von r ist $\Rightarrow$ Strahlung

---

Multipolentwicklung

$$\vec{g}(k\vec{n}) = \int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}') \underbrace{e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}'}}_{\text{entwickeln nach } kr' \ll 1} = \vec{g}^{(0)} - ik\vec{g}^{(1)} + \dots$$

$$\vec{g}^{(0)} = \int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}') \quad \to \text{elektr. Dipol}$$

$$\vec{g}^{(1)} = \int d^3r' (\vec{n}\cdot\vec{r}') \vec{j}_0(\vec{r}') \quad \to \text{mag. Dipol, elektr. Quadrupol usw.}$$

Kommentar: der elektr. Monopolanteil ist notwendigerweise statisch, existiert nur für $\omega = 0$

Elektrische Dipolstrahlung (Hertzscher Dipol)

$$g_j^{(0)} = \int d^3r' j_{0,j}(\vec{r}') = \int d^3r' \sum_k j_{0,k}(\vec{r}') \nabla_k' r_j' \overset{\text{part. I.}}{=} -\int d^3r' \sum_k \left[\nabla_k' j_{0,k}(\vec{r}')\right] r_j'$$

$$= -i\omega \int d^3r' \rho_0(\vec{r}') r_j'$$

$\nabla\vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{j}_0 - i\omega\rho_0 = 0$

$$\vec{g}^{(0)} = -i\omega \int d^3r' \, \vec{r}' \rho_0(\vec{r}') = -i\omega \vec{p}_0$$

↑ elektr. Dipolmoment

→ Elektrische Dipolstrahlung:

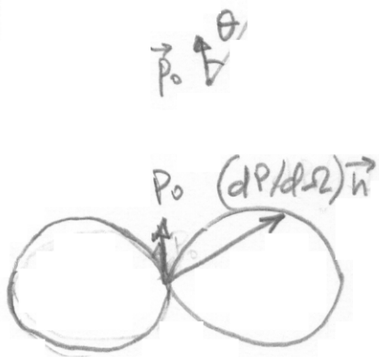
$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{g}^{(0)} = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}_0$$

– diese Formel ist allgemein (Nah-, Zwischen-, Fernzone)

$$\left.\begin{aligned} \vec{B}_0(\vec{r}) &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \vec{n} \times \vec{p}_0 \\ \vec{E}_0(\vec{r}) &= -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}_0) \end{aligned}\right\} \therefore \underline{\text{Fernfeld } kr \gg 1}$$

Abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} |\vec{n} \times \vec{g}^{(0)}|^2 = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{n} \times \vec{p}_0|^2$$



$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\vec{p}_0|^2 \sin^2\theta}$$

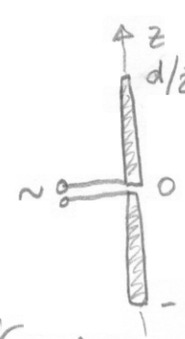
Abstrahlung eines oszillierenden elektr. Dipols

Gesamte abgestrahlte Leistung

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} p_0^2 \cdot 2\pi \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \cdot \sin^2\theta}_{= \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2) = 4/3}$$

$$\boxed{P = \frac{\omega^4}{3c^3} |\vec{p}_0|^2}$$

Beispiel: Dipolantenne



Strom $I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) e^{-i\omega t}$

Lineare Ladungsdichte (nach der Kontinuitätsgleichung)

$$p_0(z) = \frac{2iI_0}{\omega d} \operatorname{sign} z$$

Elektr. Dipolmoment:

$$p_0 = \int_{-d/2}^{d/2} dz \, z \, p_0(z) = \frac{iI_0 d}{2\omega}$$

Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^2 I_0^2 d^2}{32\pi c^3}\sin^2\theta = \frac{(I_0 k d)^2}{32\pi c}\sin^2\theta$$

Gesamte abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{(I_0 k d)^2}{12 c} \equiv \frac{1}{2} I_0^2 R_s$$

(R_s: Strahlungswiderstand)

$$R_s = \frac{1}{6c}(kd)^2$$

Widerstandsumrechnung $\frac{1}{c} \longleftrightarrow 30\,\Omega$ (Gauß) (SI)

Damit ist der Strahlungswiderstand einer Dipolantenne in Ohm:

$$R_s = 5\,\Omega \cdot (kd)^2$$

Elektrische Dipolstrahlung: Nahfeld

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \xrightarrow[\text{nur Dipolterm}]{r \gg r' \sim d;} \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}')$$

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\vec{g}^{(0)} = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}_0$$ allgemein (für beliebige kr)

Nahzone: $kr \ll 1 \rightarrow \vec{A}_0(\vec{r}) \simeq -\frac{ik}{r}\vec{p}_0$

$$\vec{B}_0 = \vec{\nabla}\times\vec{A}_0 = -ik\,\vec{\nabla}\frac{1}{r}\times\vec{p}_0 = ik\frac{\vec{n}\times\vec{p}_0}{r^2}$$

$$\vec{E}_0 = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}_0 = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{n}\times\vec{p}_0}{r^2}\right) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}_0)-\vec{p}_0}{r^3}$$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ – Dipolfeld wie in Elektrostatik, nur moduliert in Zeit

$|\vec{B}_0| \sim kr\,|\vec{E}_0| \ll |\vec{E}_0| \Rightarrow$ die Felder in der Nahzone sind vorwiegend elektrischer Natur

Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupol-Strahlung

$$\vec{A}_0 = \frac{e^{ikr}}{cr}\vec{g} \;;\quad \vec{g} = \vec{g}^{(0)} - ik\vec{g}^{(1)} + \ldots$$

($\vec{g}^{(0)}$: el. Dipol)

$$\vec{g}^{(1)} = \int d^3r' (\vec{n}\cdot\vec{r}')\,\vec{j}_0(r') \quad \text{– mag. Dipol + el. Quadrupol}$$

$$g_p^{(1)} = \sum_e n_e \int d^3r'\, r'_e\, j_{0,p} = \sum_e n_e \int d^3r' \left[\underbrace{\frac{j_{0,p} r'_e - j_{0,e} r'_p}{2}}_{-c(\vec{n}\times\vec{m}_0)_p} + \frac{j_{0,p} r'_e + j_{0,e} r'_p}{2} \right]$$

$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{j}_0 \quad \text{– magnetisches Dipolmoment}$$

(in Gauß-System mit $1/c$ definiert)

Der zweite Term:

$$\sum_e n_e \int d^3r' \underbrace{\frac{j_{0,p} r'_e + j_{0,e} r'_p}{2}}_{=\sum_e n_e \int d^3r' \frac{\sum_q j_{0,q}\nabla_q (r'_e r'_p)}{2} =}$$

$$\overset{\text{P. Int.}}{=} \sum_e - n_e \int d^3r' \frac{r'_e r'_p}{2} \sum_q \nabla_q j_{0,q} \overset{\text{Kontinuitätsgl.}}{=\!=} \sum_e - n_e \int d^3r' \frac{r'_e r'_p}{2} i\omega\rho_0$$

$$= \sum_e \frac{-i\omega n_e}{2}\left[\frac{Q_{0,ep}}{3} + \frac{\delta_{ep}}{3}\int d^3r' (r')^2 \rho_0(\vec{r}') \right]$$

$$Q_{0,ep} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(3 r'_e r'_p - (\vec{r}')^2 \delta_{ep}\right) \quad \text{– elektr. Quadrupolmoment}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{g}^{(1)} = -c\,\vec{n}\times\vec{m}_0 - \frac{i\omega}{6}\sum_{e_p} n_e Q^{(2)}_{0,ep}\vec{e}_p - \frac{i\omega}{6}\vec{n}\int d^3r' (r')^2 \rho_0(\vec{r}')}$$

↑ Der Term liefert kein Beitrag zu $\vec{B}$ und $\vec{E}$, da $\vec{\nabla}\times(\vec{n}\,F(r)) = 0$ für beliebige $F(r)$ ($|\vec{r}|$)

$$\vec{B}_0^{(1)} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_0^{(1)} = \vec{\nabla}\times\frac{e^{ikr}}{cr}(-ik)\vec{g}^{(1)} \overset{\text{Fernzone}}{\simeq} \frac{k^2 e^{ikr}}{cr}\vec{n}\times\vec{g}^{(1)}$$

($\vec{\nabla}$ wirkt auf e^{ikr})

$$\vec{E}_0^{(1)} = -\vec{n}\times\vec{B}_0^{(1)}$$

Magnetischer Dipol (Fernzone)

$$\vec{g}^{(1,mag)} = -c\,\vec{n}\times\vec{m}_0$$

$$\vec{B}_0^{(1,mag)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{m}_0)$$

$$\vec{E}_0^{(1,mag)} = -\vec{n}\times\vec{B}_0^{(1,mag)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r}\,\vec{n}\times\vec{m}_0$$

$\cdot\,\vec{n}(\vec{n}\vec{m}_0) - \vec{m}_0$

zu vergleichen mit Hertz'schen (elektrischen) Dipol

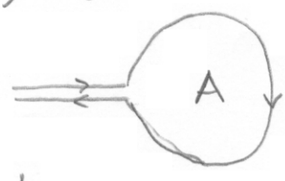
$$\vec{B}_0^{(0)} = \frac{k^2 e^{ikr}}{r}\,\vec{n}\times\vec{p}_0 \;;\quad \vec{E}_0^{(0)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{p}_0)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}\,|\vec{m}_0|^2\sin^2\theta$$

— die selbe Formel wie für el. Dipol ($\vec{p}_0$ ersetzt durch $\vec{m}_0$)

$$P = (\omega^4/3c^3)\,|\vec{m}_0|^2$$

Beispiel:



Kreisstrom, Fläche A

$$m_0 = I_0 A\cdot\frac{1}{c}$$

$$\Phi = \frac{\omega^4}{3c^3}\,\frac{I_0^2 A^2}{c^2} = \frac{k^4 I_0^2 A^2}{3c} \equiv \frac{1}{2} I_0^2 R_s$$

Strahlungswiderstand $R_s = \frac{2}{3c}\,k^4 A^2 \longrightarrow 20\Omega\cdot(k^2 A)^2$

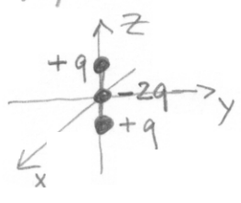
Elektrischer Quadrupol

$$\vec{g}^{(1,el)} = -\frac{i\omega}{6}\sum_{\ell p} n_\ell Q_{0,\ell p}\vec{e}_p \;,\qquad Q_{0,\ell p} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,(3r_\ell' r_p' - (r')^2\cdot\delta_{\ell p})$$

$$\vec{g} = -ik\vec{g}^{(1,el)} = -\frac{k^2}{c}\sum_{\ell p} n_\ell Q_{0,\ell p}\vec{e}_p$$

Wir untersuchen einen symmetrischen Quadrupol

$$Q_{0,xy} = Q_{0,xz} = Q_{0,yz} = 0 \;;\quad Q_{0,xx} = Q_{0,yy} = -\frac{1}{3}Q_0,\quad Q_{0,zz} = \frac{2}{3}Q_0$$



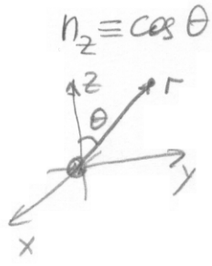
$$\vec{g} = -\frac{k^2 c}{6} Q_0 \left(-n_x \vec{e}_x - n_y \vec{e}_y + 2 n_z \vec{e}_z\right)$$

$$= -\frac{k^2 c}{6} Q_0 \left(3 n_z \vec{e}_z - \vec{n}\right)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{ik e^{ikr}}{cr} \vec{n} \times \vec{g} = -\frac{ik^3 e^{ikr}}{6r} \vec{n} \times \left(3 n_z \vec{e}_z - \vec{n}\right)$$

$$= -\frac{ik^3 e^{ikr}}{2r} n_z \left(\vec{n} \times \vec{e}_z\right) = -\frac{ik^3 e^{ikr}}{2r} \vec{n} \times \vec{e}_z \cos\theta$$

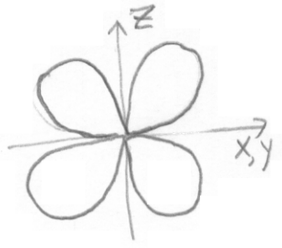
$n_z \equiv \cos\theta$



$$\vec{E}_0 = -\vec{n} \times \vec{B}_0 = \frac{ik^3 e^{ikr}}{2r} \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{e}_z\right) \cos\theta$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} \left|\vec{n} \times \vec{g}\right|^2 = \frac{k^6 c}{32\pi} |Q_0|^2 \cos^2\theta \left|\vec{n} \times \vec{e}_z\right|^2$$

$$= \frac{k^6 c}{32\pi} |Q_0|^2 \cos^2\theta \sin^2\theta$$



$$P = \frac{k^6 c}{60} |Q_0|^2$$