

Kapitel IV. Elektrodynamik in Materie

① Makroskopische Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

gelten auch in Materie (Dielektrikum) für tatsächliche Felder, die man in diesem Kontext als mikroskopische el/mag Felder charakterisiert:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

mikroskopische
Maxwell-Gl.

\vec{e}, \vec{b} - mikroskopische Felder; ρ, \vec{J} - mikroskopische Ladungs-/Stromdichte



\Rightarrow Schwankungen von allen mikroskopischen Größen auf der Skala $\lesssim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$

Wenn man an mikroskopischen Details auf der atomaren Skala nicht interessiert ist, kann man sie über eine räumliche Mittelung eliminieren, die durch die Faltung mit einer geeigneten Funktion $f(\vec{r})$ definiert wird:

- $\int d^3r f(\vec{r}) = 1$, $f(\vec{r}) \geq 0$

- $f(\vec{r})$ ist in einem Bereich mit der charakteristischen Abmessung b in Umgebung von $\vec{r} = 0$

"lokalisiert" und ist glatt.

Z.B. : $f(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} e^{-r^2/b^2}$



• $a \ll b \ll \lambda$

↑
mikroskopische
(atomare) Skala

↑ charakteristische Skala
des makroskopischen Problems
(für eine el/mag. Welle :
Wellenlänge)

Mittelung:

$F(\vec{r}, t) \rightarrow \langle F \rangle(\vec{r}, t) = \int d^3r' F(\vec{r}', t) f(\vec{r} - \vec{r}')$
(Faltung)

$\left. \begin{aligned} \langle \vec{e} \rangle &= \vec{E} \\ \langle \vec{b} \rangle &= \vec{B} \end{aligned} \right\} \text{makroskopische el. und mag. Felder}$

Mittelung der mikroskop. Maxwell-Gl. →

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle$

Wir brauchen noch $\langle \rho \rangle$ und $\langle \vec{j} \rangle$
makroskopische Beiträge zu extrahieren

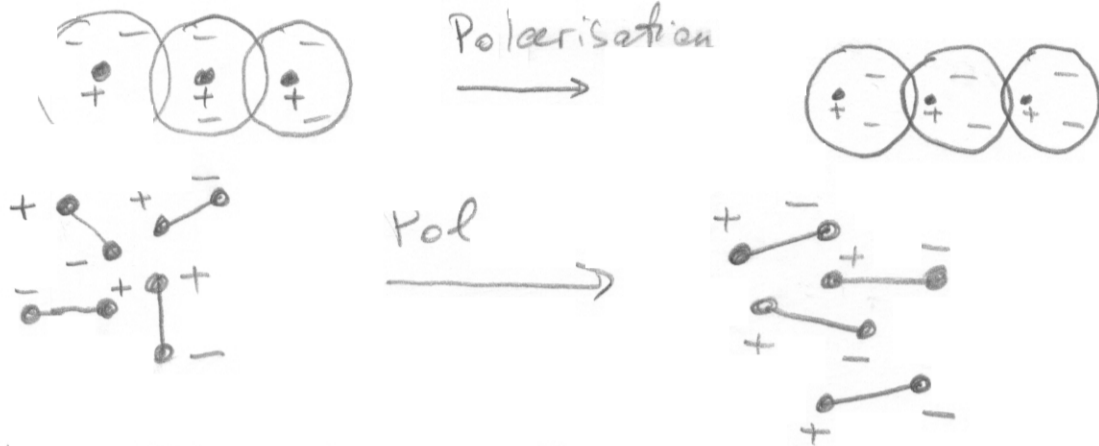
$\rho(\vec{r}) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) + \rho_{\text{geb}}(\vec{r})$

↑ freie Ladungen

↑ gebundene Ladungen

Gebundene Ladungen entstehen durch Polarisation der
Materie: Elektronenwolken verschieben sich gegenüber

den Kernen oder bereits existierende Dipole von Molekülen richten sich aus.



Wir wollen $\langle P_{\text{geb}} \rangle$ berechnen

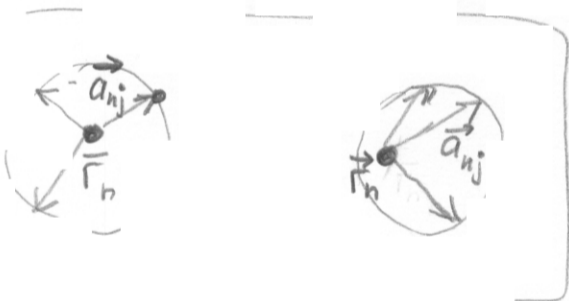
$$\langle P_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \int d^3r' f(\vec{r}-\vec{r}') \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \delta(\vec{r}' - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj}))$$

Moleküle
(Elementareinheiten)

Ladungen innerhalb der Molekül #n

Koordinate der Mitte
der Molekül #n

Verschiebung der Ladung
 q_j in der Molekül #n
bezüglich \vec{r}_n



$$\langle P_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j f(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj}))$$

$$= \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \left[f(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{a}_{nj} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots \right]$$

$$\sum_{j^{(n)}} q_j = q_n \quad \text{Gesamtladung der Molekül #n}$$

$$\sum_{j^{(n)}} q_j \vec{a}_{nj} = \vec{p}_n \quad \text{Dipolmoment der Molekül #n}$$

(höhere Terme \rightarrow höhere Multipolmomente)

$|\vec{a}_{nj}| \sim a \ll b$
 \Rightarrow Entwicklung nach Potenzen von $a/b \ll 1$
 (\leftrightarrow Multipolentwicklung)

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \underbrace{\sum_n q_n f(\vec{r} - \vec{r}_n)} - \sum_n \vec{p}_n \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots$$

Quadrupol- und höhere Beiträge; unten vernachlässigt

$$\Rightarrow \langle \rho_{\text{geb}}^{(0)} \rangle(\vec{r}) = 0, \text{ da Moleküle}$$

(oder andere Elementareinheiten) üblicherweise neutral sind

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \rho_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) &= - \sum_n \vec{p}_n \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) = - \vec{\nabla} \cdot \sum_n \vec{p}_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) \\ &= - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_n \vec{p}_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \left\langle \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle$$

gemittelte Dipolmomentdichte

$\vec{P}(\vec{r})$ - dielektrische Polarisation

$$\langle \rho \rangle = \underbrace{\langle \rho_{\text{frei}} \rangle}_{\rho_{\text{makt}}} + \langle \rho_{\text{geb}} \rangle = \rho_{\text{makt}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

ρ_{makt} - makroskopische Ladungsdichte

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho_{\text{makt}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho_{\text{makt}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{makt}}}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} - \text{dielektrische Verschiebung}$$

Es bleibt das makroskopische Form der letzten Maxwell-Gl zu finden $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{J} \rangle$.

\Rightarrow wir brauchen $\langle \vec{J} \rangle$. Dafür müssen wir den Strom von gebundenen Ladungen zu finden

$$\langle \vec{J}_{geb} \rangle(\vec{r}) = \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} f(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_{nj})) \quad \boxed{\dot{\vec{P}} \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

$$= \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} \left[f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \vec{a}_{nj} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots \right]$$

1. Term: $\sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_n \dot{\vec{P}}_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$
 (el. Dipol)

2. Term: $-\sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} (\vec{a}_{nj} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n)) =$

$$\dot{a}_i (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sum_l \dot{a}_i a_l b_l = \frac{1}{2} \sum_l (\dot{a}_i a_l + a_l \dot{a}_i) b_l + \frac{1}{2} \sum_l (\dot{a}_i a_l - a_l \dot{a}_i) b_l$$

$$= \frac{1}{2} \sum_l \left[\frac{\partial}{\partial t} (a_i a_l) \right] b_l + \frac{1}{2} \sum_{lk} [\dot{\vec{a}} \times \vec{a}]_k \epsilon_{ilk} b_l$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) \times (\vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j \dot{\vec{a}}_{nj} [\vec{a}_{nj} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n)]$$

mag. Dipol el. Quadrupol
(wird vernachlässigt)

$$\simeq c \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{M}_{(\vec{r})} = \frac{1}{2c} \sum_n \sum_{j^{(n)}} q_j f(\vec{r} - \vec{r}_n) \vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj} = \left\langle \sum_n \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle$$

$$\vec{m}_n = \frac{1}{2c} \sum_{j^{(n)}} q_j \vec{a}_{nj} \times \dot{\vec{a}}_{nj} - \text{Magnet. Dipolmoment der Molekül \# n}$$

$\vec{M}(\vec{r})$ - gemittelte mag. Dipolmomentdichte - Magnetisierung

$\Rightarrow \langle \vec{J}_{\text{geb}} \rangle(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \vec{\nabla} \times \vec{M}$
Strom der gebundenen Ladungen

Maxwell-Gl.: $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{J} \rangle \equiv \frac{4\pi}{c} [\langle \vec{J}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{J}_{\text{geb}} \rangle]$

$= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{makt}} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ - dielekt. Verschiebung

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ - Magnetfeld, magnetische Feldstärke

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{makt}}$

! Neu Schreibweise:
 $\vec{J}_{\text{makt}} \equiv \langle \vec{J}_{\text{frei}} \rangle \rightarrow \vec{J}$
 $\vec{P} + \vec{P}_{\text{pol}} = \vec{P}_{\text{tot}}, \vec{J} + \vec{J}_{\text{pol}} = \vec{J}_{\text{tot}}$

Nochmal alle 4 Gleichungen:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$	Makroskopische Maxwell-Gleichungen $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$
---	---

Zwei homogene Maxwell-Gl sind unverändert geblieben:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Um die beide inhomogene -Gl zu lösen, braucht man die Information über den Zusammenhang zwischen \vec{D} und \vec{E} und auch zwischen \vec{H} und \vec{B} . Diese Relationen sind vom Material abhängig.

② Suszeptibilitäten, Dielektrizitätskonstante,
magnetische Permeabilität

Für viele Substanzen gilt (in schwachen Feldern)

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad \chi_e - \text{elektrische Suszeptibilität}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m - \text{magnetische Suszeptibilität}$$

(Annahmen: • Isotropie
• Ferroelektrische und ferromagnetische Materialien sind ausgeschlossen)

$$\Rightarrow \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad - \text{Dielektrizitätskonstante}$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m \quad - \text{magnetische Permeabilität}$$

Bemerkung: Eigentlich sind ϵ und μ keine Konstanten, sondern Funktionen $\epsilon(\omega, \rho)$, $\mu(\omega, \rho)$. Für nicht zu große ω, ρ können sie aber näherungsweise als Konstanten betrachtet werden

Beispiel: Wasser (20°C): $\epsilon \approx 80$

$$\mu \approx 0.999992$$

Vakuum: $\epsilon=1, \mu=1, \vec{D}=\vec{E}, \vec{H}=\vec{B}$

Für übliche (nicht ferromagnetische) Stoffe ist $|\chi_m| \ll 1$ (und damit $\mu \approx 1$).

$\chi_m > 0$ paramagnetisch

$\chi_m < 0$ diamagnetisch

③ Energiebilanz (siehe III.3)

$$\vec{H} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right]$$

$$- \vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right]$$

$$\frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - \underbrace{\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}$$

$$\boxed{S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}} \quad \text{— Poynting-Vektor}$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{dW_{\text{mat}}}{dt} = \int d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{— Arbeit geleistet von el/mag Feldern} \Rightarrow \text{Änderung der Energie von freien Ladungen}$$

⇒ \vec{S} — Energiestromdichte

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}} \quad \text{— Energiedichte des el/mag Feldes}$$

$$\left[\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \vec{j} \cdot \vec{E} \right] \quad \text{Poynting-Satz}$$

Mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi} \left(\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \vec{H}^2 + \epsilon \vec{E}^2 \right) =$$

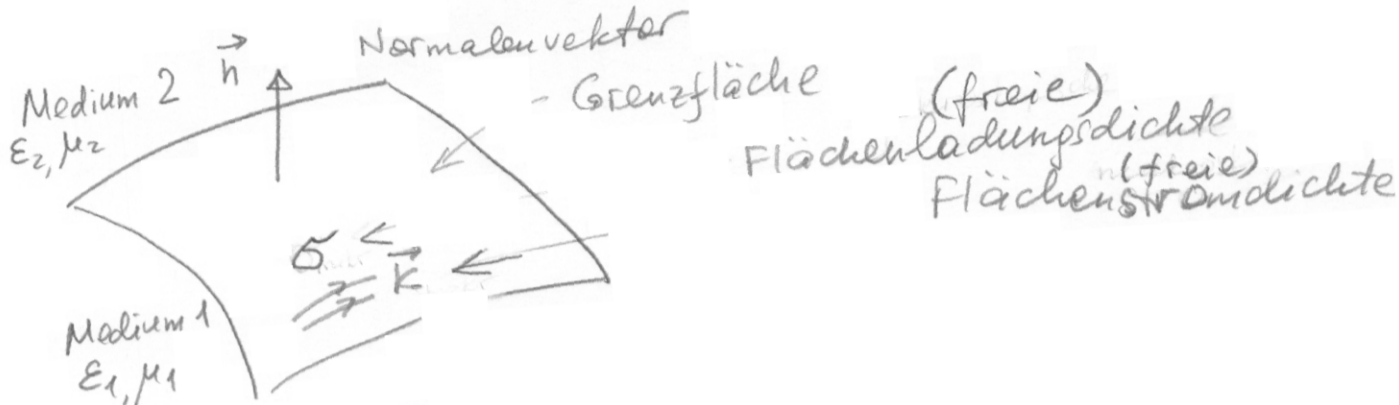
$$= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})$$

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$W_{em} = \int d^3r w_{em} \quad - \text{Energie des el/m Feldes}$$

④ Randbedingungen

siehe I.5 und II.2



i)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{2\perp} - D_{1\perp} = 4\pi\sigma}$$

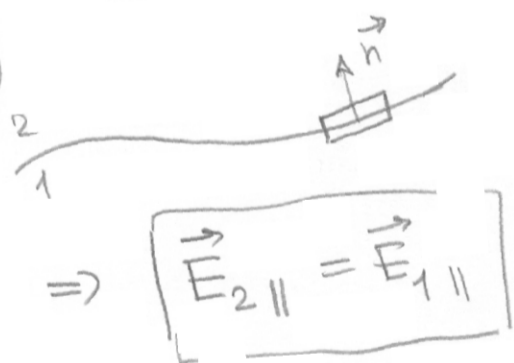
oder äquivalent $\boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma}$

\perp - Normalkomponente, senkrecht zur Oberfläche
 \parallel - Tangentialkomponente, parallel zur Oberfläche

Auf der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika gibt es keine freie Ladungen $\Rightarrow \sigma_f = 0$
 (angenommen, daß es keine metallische Schicht oder andere externen Ladungen in zwischen gibt)

$$\Rightarrow \boxed{D_{2\perp} = D_{1\perp}}$$

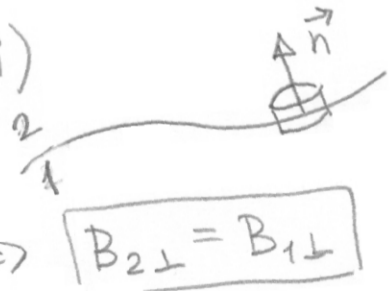
ii)



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{v}$$

oder äquivalent $\boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0}$

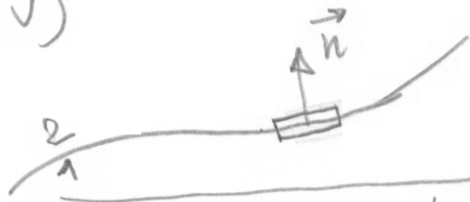
iii)



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

oder äquivalent $\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0}$

iv)



$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\Rightarrow \left| \vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \times \vec{n} \right| \quad \text{oder äquivalent:}$$

$$\left| \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \right|$$

Auf der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika gibt es keine freie Ströme $\Rightarrow \vec{K} = 0$

$$\Rightarrow \left| \vec{H}_{2\parallel} = \vec{H}_{1\parallel} \right|$$

⑤ Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})) = 4\pi\rho$$

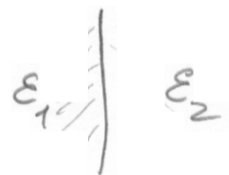
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Wenn $\epsilon = \text{const} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho/\epsilon \rightarrow$

dieselbe Gleichungen wie im Vakuum, nur mit $\rho \rightarrow \rho/\epsilon$.

Die Situation wird komplizierter wenn das System nicht homogen ist, d.h. ϵ ist von \vec{r} abhängig.

Typische Situation: zwei Dielektrika



Ein wichtiger Spezialfall: $\epsilon_1 = 1$ (Vakuum)

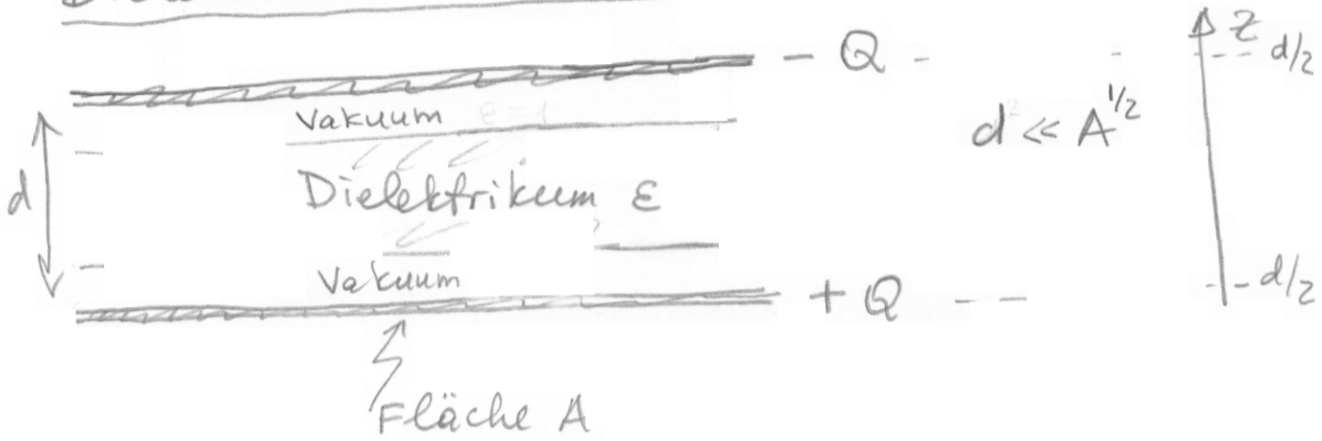
$$\epsilon_2 = \epsilon$$

Man muß in jedem Bereich die Gleichungen mit entsprechender Konstante ϵ lösen + Randbedingungen an der Grenzfläche: $\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$, $D_{1\perp} = D_{2\perp}$. Wie im Vakuum kann man das Skalarpotential φ einführen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Randbedingung für φ : $\varphi_1 = \varphi_2$ (stetig)

Dielektrikum in Kondensator



$$\vec{D} = D(z) \vec{e}_z$$

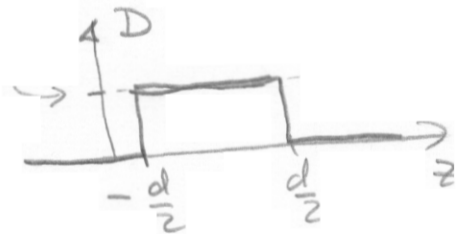
Außerhalb des Kondensators ($|z| > d/2$) $D(z) = 0$

Innerhalb des Kondensators ($-d/2 < z < d/2$):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \frac{dD(z)}{dz} = 0 \Rightarrow D(z) = \text{const}$$

Randbedingung an metallischen Flächen

$$\Rightarrow D = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{Q}{A}$$

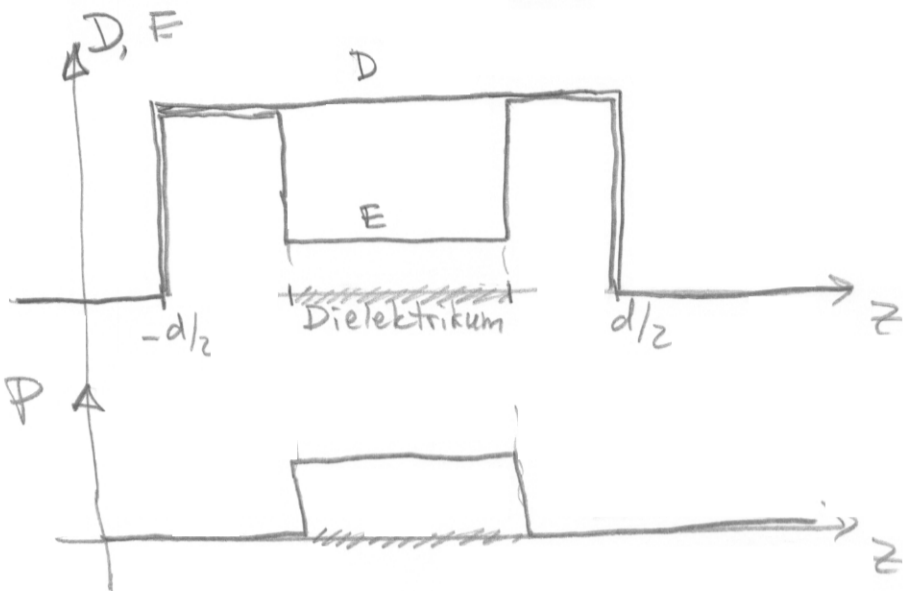


Das gilt ohne und mit Dielektrikum, unabhängig von ϵ .

An den Grenzflächen Vakuum-Dielektrikum ist D stetig, da da keine makroskopische Ladungen gibt.

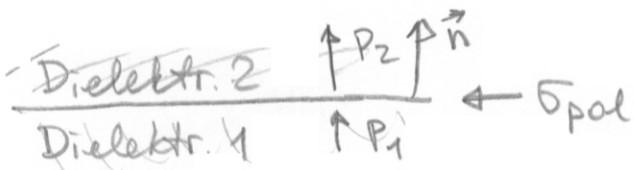
$$E = D/\epsilon ; P = (D - E)/4\pi ; \epsilon_{\text{vak}} = 1$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} D \\ D/\epsilon \end{cases} ; P = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon} D \end{cases} \begin{matrix} \text{(Vakuum innerhalb} \\ \text{des Kondensators)} \\ \text{(Dielektrikum)} \end{matrix}$$



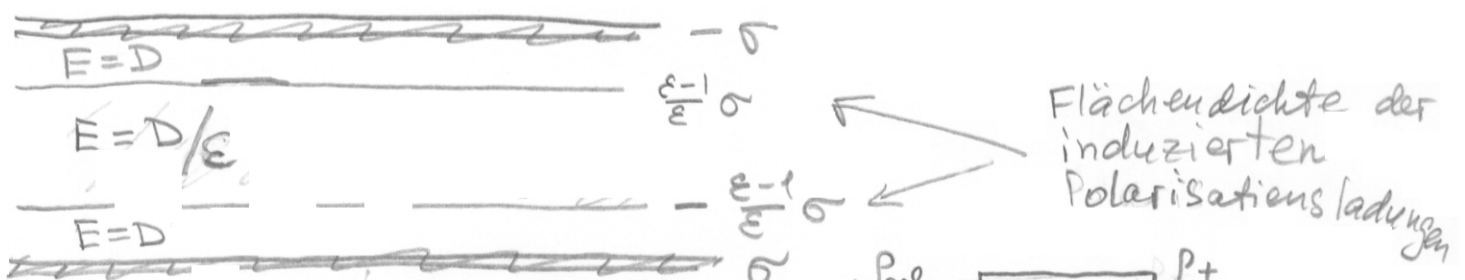
An der Grenzfläche Vakuum - Dielektrikum \vec{P} (und \vec{E}) ist nicht stetig \Rightarrow Polarisationsladungen mit Flächendichte σ_{pol}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\langle \rho_{geb} \rangle \Rightarrow \underline{\sigma_{pol} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}}$$

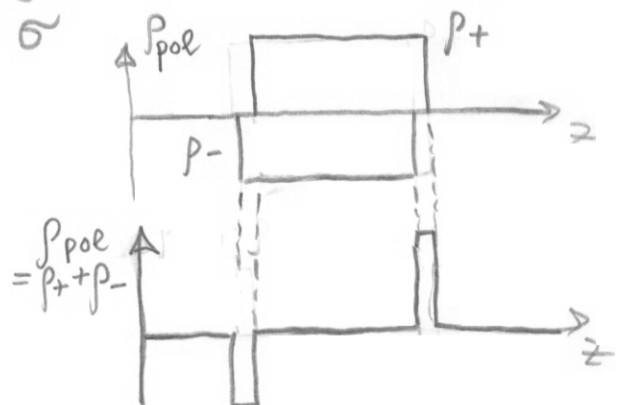


(Äquivalent kann man benutzen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$)

$$\Rightarrow \sigma_{pol} = \pm \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma = \pm \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{Q}{A} \quad \begin{matrix} \text{obere Grenzfläche} \\ \text{untere Grenzfläche} \end{matrix}$$



Wie entstehen die Polarisationsladungen?

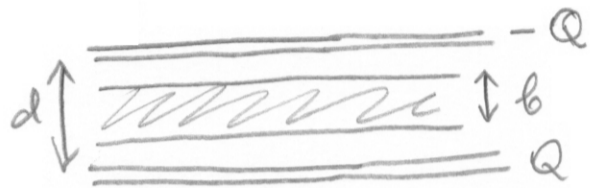


Limes $\epsilon \rightarrow \infty$: $\sigma_{\text{pol}} \rightarrow \pm \sigma$

$E \rightarrow 0$ in Dielektrikum

entspricht dem Verhalten eines Metalls : vollständige Abschirmung des externen Feldes

Kapazität des Kondensators



$$U = \int_{-d/2}^{d/2} E dz = \left(\frac{b}{\epsilon} + d - b \right) \cdot 4\pi \frac{Q}{A} \equiv C^{-1} Q$$

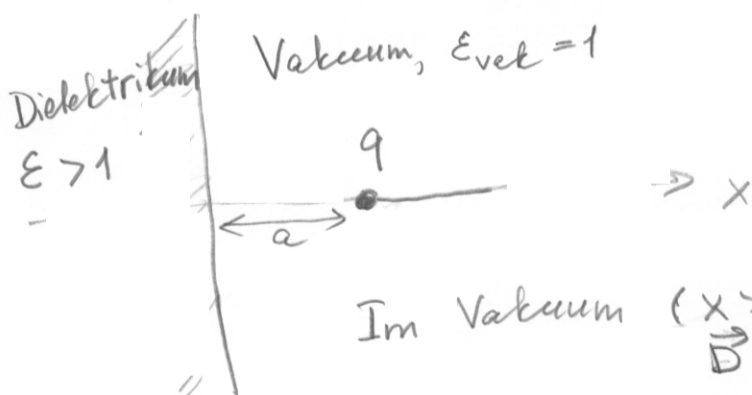
$$\Rightarrow C = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{\frac{b}{\epsilon} + d - b} = C_0 \frac{d}{\epsilon^{-1} b + d - b}$$

im Vakuum ($\epsilon=1$)

Wenn $b=d$ (der Kondensator ist vollständig mit dem Dielektrikum ausgefüllt)

$$C = \epsilon C_0$$

Punktladung und Dielektrikum (vergl. I.10)

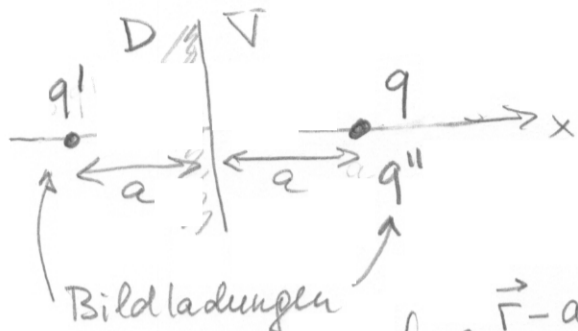


Im Vakuum ($x > 0$): $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
 $\vec{D} = \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi q \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$

Im Dielektrikum ($x < 0$): $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Randbedingungen ($x=0$): $\vec{E}_{\parallel, V} = \vec{E}_{\parallel, D}$; $E_{\perp, V} = \epsilon E_{\perp, D}$

Lösung mit Hilfe von Bildladungen



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} q \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} + q' \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3}, & x > 0 \quad (V) \\ q'' \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} & x < 0 \quad (D) \end{cases}$$

- löst die Gleichungen für beliebige q', q''
 Wie werden jetzt zeigen, dass die Stetigkeitsbedingungen durch geeignete Wahl von q', q'' erfüllt werden können

• $\vec{E}_{||, V} = \vec{E}_{||, D}$; y-Komponente \Rightarrow

$$q \frac{y}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + q' \frac{y}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = q'' \frac{y}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow q + q' = q'' \quad (1)$$

z-Komponente \Rightarrow dieselbe Bedingung

• $E_{\perp, V} = \epsilon E_{\perp, D} \Rightarrow q \frac{-a}{[\dots]^{3/2}} + q' \frac{a}{[\dots]^{3/2}} = -\epsilon q'' \frac{a}{[\dots]^{3/2}}$

$$\Rightarrow q - q' = \epsilon q'' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow q' = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}, \quad q'' = \frac{2q}{\epsilon + 1}$$

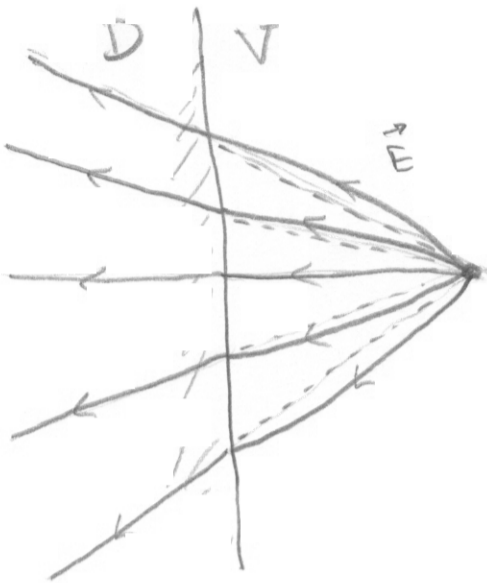
Grenzfälle:

• $\epsilon = 1 \rightarrow q' = 0, \quad q'' = q$

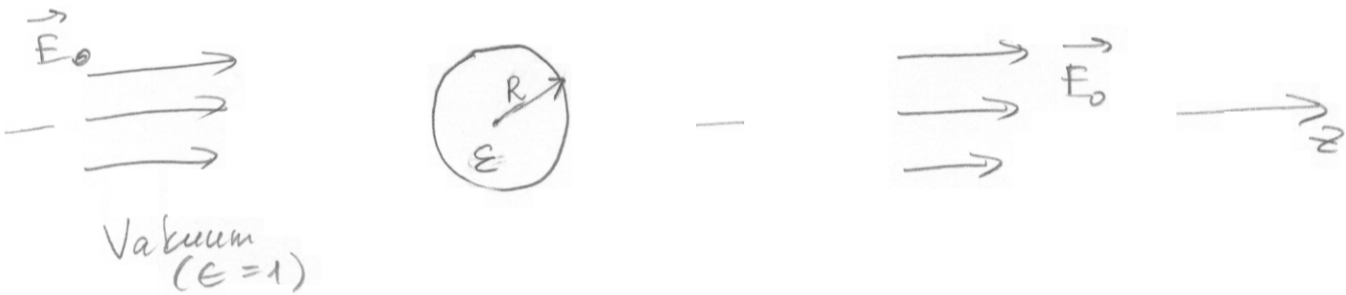
$\rightarrow \vec{E} = q \frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3}$ überall. Ok.

• $\epsilon = \infty \rightarrow q' = -q, \quad q'' = 0$

$\rightarrow \vec{E} = 0$ in Dielektrikum. Dielektrikum \rightarrow Metall.



Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld



$\vec{E}(r \gg R) = \vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z = \text{const}$
 $\vec{E}(\vec{r}), \vec{D}(\vec{r}), \vec{P}(\vec{r}) = ?$

Elektrostatistische Gleichungen:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$

$\vec{D} = \begin{cases} \vec{E}, & r > R \text{ (Vakuum)} \\ \epsilon \vec{E}, & r < R \text{ (Dielektrikum)} \end{cases}$

$\nabla^2 \varphi = 0$ für $r > R$
 (Laplace-Gleichung) und $r < R$

+ Randbedingungen bei $r = R$

$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} \cdot r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$

allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

Axialsymmetrie bezüglich der z-Achse

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \varphi(r, \theta) \quad (\text{unabhängig von der Polwinkel } \varphi)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_{l0} r^l + B_{l0} r^{-l-1}) Y_{l0}(\theta)$$

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

Innenraum ($r < R$): $\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$

(r^{-l-1} singularär bei $r \rightarrow 0$
 \Rightarrow nicht erlaubt)

Außenraum ($r > R$):

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta)$$

• Randbedingung bei $r \rightarrow \infty$: $\varphi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \underbrace{\cos\theta}_{P_1(\cos\theta)}$
 $\Rightarrow B_1 = -E_0$; $B_l = 0$ für alle $l \neq 1$

• Randbedingungen bei $r = R$:

$$E_{\parallel} \text{ stetig} \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r=R+0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r=R-0} \quad (1)$$

$$D_{\perp} \text{ stetig} \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R+0} = \epsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R-0} \quad (2)$$

φ stetig: $\varphi|_{r=R+0} = \varphi|_{r=R-0} \quad (1a) \leftarrow \text{äquivalent}$

-112-

$$(1) \Rightarrow A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{R^3}$$

oder
(1a)

$$A_l = \frac{C_l}{R^{2l+1}}, \quad l \neq 1$$

wir benutzen,
dass

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = P_l^1(\cos \theta)$$

orthogonal für
verschiedene l

$$(2) \Rightarrow \epsilon A_1 = -E_0 - \frac{2C_1}{R^3}$$

$$\epsilon l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{R^{2l+1}}, \quad l \neq 1$$

$$l \neq 1 \text{ Gleichungen} \Rightarrow A_l = C_l = 0$$

$$l = 1 \text{ Gleichungen} \Rightarrow A_1 = -\frac{3}{2+\epsilon} E_0$$

$$C_1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_0$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{3}{\epsilon+2} E_0 r \cos \theta \equiv -\frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_0 \cdot \vec{r}, & r < R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \\ = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r^3}, & r > R \end{cases}$$

Innerhalb der Kugel:

$$\text{konstantes elektrisches Feld } \vec{E}_i = \frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_i \parallel \vec{E}_0; \quad \text{für } \epsilon > 1 \quad E_i < E_0$$

Außerhalb der Kugel

$$\psi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$$

↑
äußeres Feld

↑
Feld eines Dipols

$$\vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \vec{E}_0$$

Dipolmoment

Polarisation innerhalb der Kugel

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \equiv \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

homogen über das ganze Volumen der Kugel

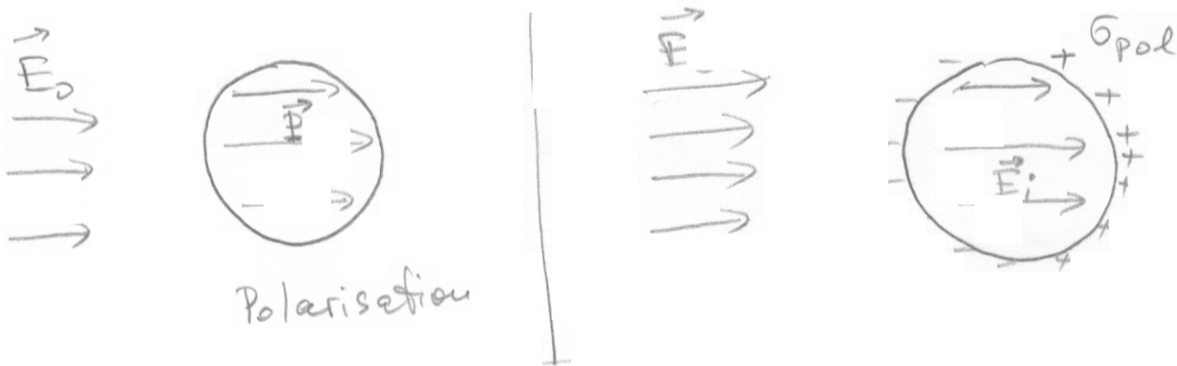
$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \vec{P} \equiv \int_V \vec{P}$$

↑ Volumen

Flächendichte der Polarisationsladungen

$$\sigma_{pol} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} \rightarrow \text{Blatt 11}$$

$\vec{P}_2 = \vec{P}$
 $\vec{P}_1 = 0$



⑥ elektrische Funktion, Lorentz-Modell

Homogene Materie, schwache Felder $\Rightarrow \vec{P}(\vec{r}, t) = \int d^3r' dt' \chi_e(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t')$

↑
 elektrische Suszeptibilität
 (nichtlokal in \vec{r} und t)

Fourier $\Rightarrow \vec{P}(\vec{k}, \omega) = \chi_e(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) + 4\pi \vec{P}(\vec{k}, \omega) = [1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)] \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$= \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

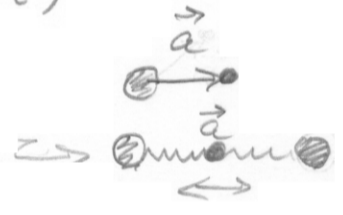
$$[\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)] \quad \text{— Dielektrische Funktion}$$

Lorentz - Modell für $\epsilon(\omega)$

Man betrachtet ein im Atom gebundenes Elektron als einen harmonischen Oszillator:

$$m(\ddot{\vec{a}} + \gamma \dot{\vec{a}} + \omega_0^2 \vec{a}) = q \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{a} - \omega t)} \quad \vec{a} = \vec{a}(t)$$

\uparrow Masse \uparrow Dämpfung ("Reibung") \uparrow Frequenz \uparrow Ladung (Elektron: $q = -e$)



$$\lambda = 2\pi/k \gg a \sim \text{Abstand zwischen Atomen}$$

$$\Rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \approx 1$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow m(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \vec{a}_0 = q \vec{E}_0$$

$$\vec{a}_0 = \frac{q \vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

Dipolmoment $\vec{p}(t) = q \vec{a}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{p}_0 = \frac{q^2 \vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \equiv \chi_e(\omega) \vec{E}_0$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

elektr. Polarisierbarkeit

Endliche Dichte n der Oszillatoren \rightarrow
 \rightarrow Polarisation

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Position des Oszillators #k

$$\vec{P}_0(\vec{r}) = \left\langle \sum_k \frac{q_k^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)}{m_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)} \right\rangle \vec{E}_0$$

$$= \sum_k \frac{q_k^2 f(\vec{r} - \vec{r}_k)}{m_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)} \vec{E}_0$$

Falls alle Oszillatoren identisch sind
 ($m_k = m, q_k = q, \omega_{0k} = \omega_0, \gamma_k = \gamma$)

$$\vec{P}_0 = \frac{q^2 n}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)} \vec{E}_0$$

n - Dichte der Oszillatoren

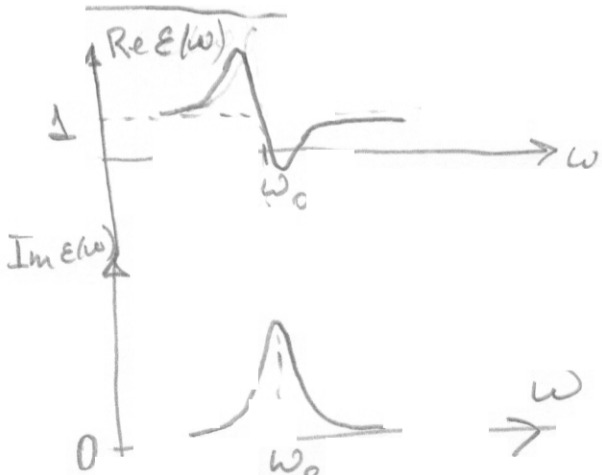
$$\equiv \chi_e \vec{E}_0$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{q^2 n}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)} = n \alpha_e \cdot \omega, \quad \text{elektrische Suszeptibilität}$$

Elektronen: $q = -e$

$$\rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{ne^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)}$$

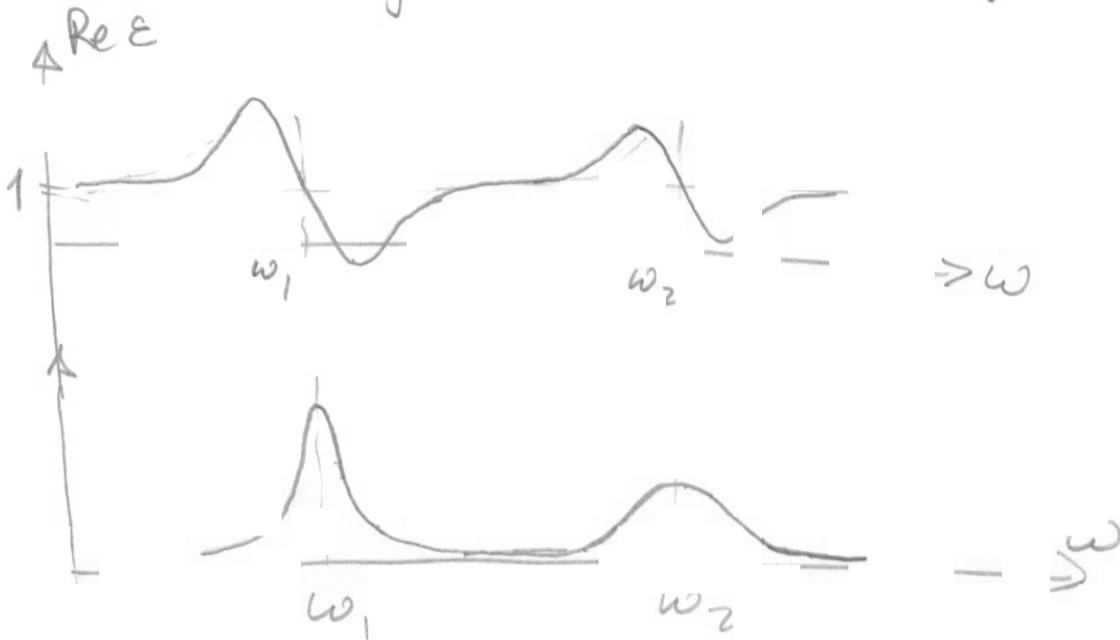
$$\left| \epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi_e(\omega) = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)} \right|$$



$\text{Im } \epsilon(\omega) \geq 0$ für $\omega > 0$
 (sonst Instabilität)

Mehrere Arten der Oszillatoren (verschiedene Arten der Atome, verschiedene Elektronen in einem Atom):

$$\epsilon(\omega) = 1 + \sum_j 4\pi n_j^{(j)} \chi_e^{(j)}(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_j \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$



Kommentar 1: Bei der Herleitung der Formel $\epsilon = 1 + 4\pi n \alpha_e$ haben wir angenommen dass das el. Feld, das auf die Oszillatoren wirkt gleich einem makroskopischen Feld \vec{E} ist. Das ist sicher eine gute Näherung in verdünnten Medien (Gasen) nicht aber unbedingt in dichten Medien, in denen das Feld von Na. Ionen einen wichtigen Beitrag liefert und damit deren Positionen (Gitter) usw. wichtig sind.

Z. B. für eine kubische Gitter findet man

$$\epsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} n \alpha_e}{1 - \frac{4\pi}{3} n \alpha_e}$$

Clausius-Mossotti

Lorentz-Lorenz

→ Gleichung (Jackson, 4.5)

Für verdünnte Medien ($n \alpha_e \ll 1$) das ist $\approx 1 + 4\pi n \alpha_e$ wie erwartet

Kommentar 2

Man kann $\epsilon(\omega)$ als komplexe Funktion einer komplexen Variabel betrachten

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_j \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

$\epsilon \in \mathbb{C}$
 $\omega \in \mathbb{C}$

Eigenschaften:

- $\epsilon(\omega)$ ist analytisch für $\text{Im } \omega > 0$ (1)
- $\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$ auf der reellen Achse (2)



Diese Eigenschaften sind axiomen + + als das Lorentz-Modell; (1) folgt aus der Kausalität

$$D(t) = \int dt' \chi_e(t-t') \vec{E}(t') = \chi_e(t-t') = 0 \text{ für } t-t' < 0;$$

(2) folgt aus $\chi_e(t-t') \in \mathbb{R}$

7) Elektromagnetische Wellen in der Materie

Wir betrachten ein homogenes, isotropes Medium mit $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$

Maxwell-Gl.:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$



$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Fourier $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{k}, \omega)$; $\vec{D} = \vec{D}(\vec{k}, \omega)$ usw

$$i\vec{k} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (1)$$

$$i\vec{k} \times \vec{H} + \frac{i\omega}{c} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2)$$

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c} \vec{A}$$

• Keine Quellen. $\rho, \vec{J} = 0$

• $\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega)$; $\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega)$

$$(1) \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \rightarrow i\epsilon \vec{k} \cdot (-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c} \vec{A}) = 0$$

$$(2) \rightarrow i\vec{k} \times \vec{H} + \frac{i\omega}{c} \vec{D} = 0 \rightarrow i\mu^{-1} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A}) + \frac{i\omega\epsilon}{c} (-i\vec{k}\varphi + \frac{i\omega}{c} \vec{A}) = 0$$

• Coulomb-Eichung $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$

$$(1) \rightarrow \varphi = 0$$

$$(2) \rightarrow \left[\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \right) \cdot \vec{A} = 0 \right]$$

In (\vec{r}, t) -Darstellung

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \right]$$

Wellengleichung wie im Vakuum aber mit

$$c \rightarrow c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Lösungen: ebene Wellen $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$$\text{mit } \omega^2 = c'^2 \vec{k}^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \vec{k}^2 = \frac{c^2}{n^2} \vec{k}^2$$

$n = \sqrt{\epsilon\mu} = n_r + i\alpha$ - (komplexer) Brechungsindex

$n_r, \alpha \in \mathbb{R}$

$n = n(\omega)$

$n_r = n_r(\omega)$

$\alpha = \alpha(\omega)$

α - Absorptionskoeffizient

$n_r = \text{Re} n$ - oft auch als Brechungsindex bezeichnet

Allgemeine Lösung der Gleichung $\vec{k}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$

mit komplexem n hat die Gestalt

$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$ mit zwei reellen Vektoren \vec{k}_r, \vec{k}_i

die im Allgemeinen verschiedene Richtungen haben (\Rightarrow Ebenen der konst. Phase und konst. Amplitude sind nicht parallel)

Wir beschränken uns ^{jetzt} auf den Fall $\vec{k}_r \parallel \vec{k}_i$

$\vec{k} = k \vec{e}_k, \quad k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c'}$

$\vec{A} \cdot \vec{k} = 0 \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{e}_k = 0 \Rightarrow$ zwei Polarisationen wie im Vakuum



$\vec{A}(\vec{r}, t) = \underbrace{(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2)}_{\vec{A}_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
 $\vec{A}_0 \perp \vec{e}_k$

$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \vec{A}_0 e^{i\left(\frac{n_r \omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r} - \omega t\right)} e^{-\frac{\alpha \omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \dots, \quad \vec{E}_0 = \frac{i\omega}{c} \vec{A}_0$

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \dots, \quad \vec{B}_0 = i\vec{k} \times \vec{A}_0 = n \vec{e}_k \times \vec{E}_0$

Für ^{die} physikalischen (reellen) Felder hier - steht noch Re

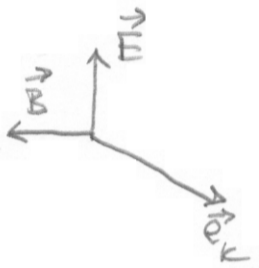
Eigenschaften:

- Transversalität $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$
wie im Vakuum

- zwei lineare Polarisationen, wie im Vakuum;
im Allgemeinen elliptische Polarisation.

Für lineare Polarisation (\vec{E}_0 reell)

$\vec{E}(\vec{r}, t) \perp \vec{B}(\vec{r}, t)$ wie im Vakuum



- Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{c}{n_r}$

- Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{n_r \omega} = \frac{\lambda_0}{n_r}$ ← im Vakuum

- Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung
 $n = \ln|e^{\delta}|$; $\delta = \arctan \alpha/n_r$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \ln|\vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{r}, t - \delta/\omega)$$

⇒ (i) Phasenverschiebung um den Winkel δ

(ii) Amplitudenverhältnis $\frac{|\vec{B}(\vec{r}, t + \delta/\omega)|}{|\vec{E}(\vec{r}, t)|} = \ln|$

- Dämpfung

Faktor $e^{-\frac{\alpha \omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$ ⇒ die el/mag Welle
in der Materie ist gedämpft:

$$\vec{E}, \vec{B} \propto e^{-\vec{e}_k \cdot \vec{r}/d}, \quad d = \frac{c}{\alpha \omega} \text{ - Eindringtiefe}$$

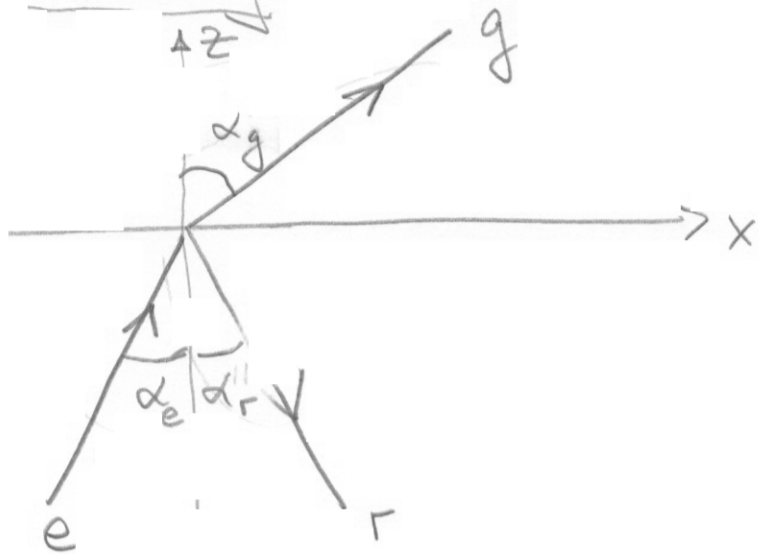
$$d^{-1} = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon \mu} \approx \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon} \approx \frac{\omega}{2c} \frac{\operatorname{Im} \epsilon}{\sqrt{\operatorname{Re} \epsilon}}$$

↑ in der Regel $\mu \approx 1$ und $\operatorname{Im} \epsilon \ll \operatorname{Re} \epsilon$

⑧ Reflexion und Brechung

$\epsilon_2, \mu_2, n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$
 Medium 2

Medium 1
 $\epsilon_1, \mu_1, n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$



e - einfallende
 r - reflektierte
 g - gebrochene

Welle

Wir vernachlässigen erst $\text{Im } \epsilon$ $\text{Im } \mu$ (und damit $\text{Im } n$)

$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = A_e e^{i(\vec{k}_e \vec{r} - \omega_e t)}$ und analog für r und g

Winkelbeziehungen

Randbedingungen bei $z=0$:

$\vec{E}_{||}(z=-0) = \vec{E}_{||}(z=+0)$ $\epsilon_1 E_{\perp}(z=-0) = \epsilon_2 E_{\perp}(z=+0)$

$\vec{H}_{||}(z=-0) = \vec{H}_{||}(z=+0)$ $\mu_1 H_{\perp}(z=-0) = \mu_2 H_{\perp}(z=+0)$

$\vec{A}_e(z=-0, x, y, t) = \vec{A}_{e0} e^{i(k_{e,x}x + k_{e,y}y - \omega_e t)}$

$\Rightarrow \vec{E}_e, \vec{H}_e(z=-0) \propto$

$\vec{A}_r(z=-0, x, y, t) = \vec{A}_{r0} e^{i(k_{r,x}x + k_{r,y}y - \omega_r t)}$

$\Rightarrow \vec{E}_r, \vec{H}_r(z=-0) \propto$

$\vec{A}_g(z=+0, x, y, t) = \vec{A}_{g0} e^{i(k_{g,x}x + k_{g,y}y - \omega_g t)}$

$\Rightarrow \vec{E}_g, \vec{H}_g(z=+0) \propto$

$$\Rightarrow \omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$$

$$k_{e,x} = k_{r,x} = k_{g,x} = k_x$$

$$k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y$$

$\Rightarrow \vec{k}_e, \vec{k}_r$ und \vec{k}_g
 liegen in einer Ebene,
 die durch Vektoren
 \vec{k}_e und \vec{e}_z definiert ist
 Wir wählen das Koordinaten-
 system so daß $k_y = 0$

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

$$k_x = \begin{cases} k_{e,x} = k_e \sin \alpha_e = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_e \\ k_{r,x} = k_r \sin \alpha_r = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_r \\ k_{g,x} = k_g \sin \alpha_g = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_r = \alpha_e \equiv \alpha_1 \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad \alpha_g \equiv \alpha_2 \quad \text{Brechungsgesetz (Snellius-Gesetz)}$$

$$k_{e,z} = k_e \cos \alpha_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1$$

$$k_{r,z} = -k_r \cos \alpha_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1 = -k_{e,z}$$

$$k_{g,z} = k_g \cos \alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1}$$

Für $\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 > 1$ ist $k_{g,z}$ imaginär \Rightarrow Totalreflexion

Intensitätsbeziehungen

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A} \parallel \vec{A}, \quad \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}; \quad \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}; \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

Zwei Polarisationen:

Polarisation I: $\vec{H} \parallel$ Einfallsebene = $\{\vec{n}, \vec{k}\} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_z\}$,
 $\vec{E} \perp \vec{A} \perp$ Einfallsebene, d.h. $\parallel \vec{e}_y$

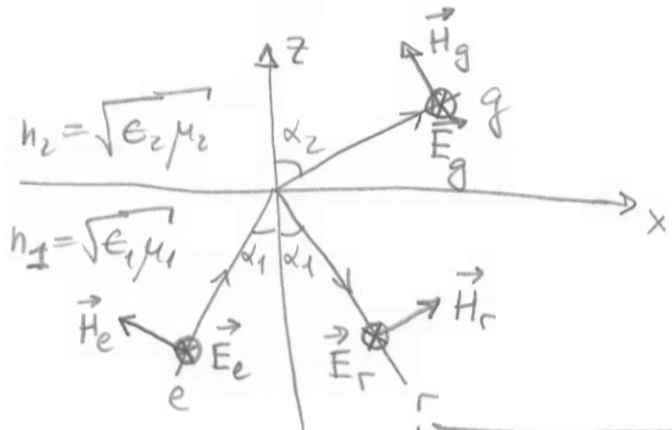
Polarisation 1

$\vec{E} \propto \vec{A} \parallel \text{Einfallsebene} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_z\}$
 $\vec{H} \perp \text{Einfallsebene, d.h. } \vec{H} \parallel \vec{e}_y$

Allgemeiner Fall = lineare Superposition der Polarisationen 1 und 2

Polarisation 1

$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = \vec{A}_{e0} e^{i(k_e \vec{r} - \omega t)}$
 und analog für $r, g \rightarrow \rightarrow$
 $\vec{E} = i\omega \vec{A}, \vec{B} = \mu \vec{H} = i k \times \vec{A}$
 $\vec{E}_{\parallel}, \vec{H}_{\parallel}, \epsilon E_{\perp}, \mu H_{\perp}$ stetig



$E_y(z=-0) = E_y(z=+0)$

$\mu_1 H_z(z=-0) = \mu_2 H_z(z=+0)$

$\mu H_z - ik_x A_y; k_{e,x} = k_{r,x} = k_{g,x} \equiv k_x$

$A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y} \quad (1)$
 soll $A_{e0,y}$ sein usw

$\epsilon_1 E_z(z=-0) = \epsilon_2 E_z(z=+0)$ - trivial erfüllt (beide Seiten = 0)

$H_x(z=-0) = H_x(z=+0) \Rightarrow \mu_1^{-1} (k_{e,z} A_{e,y} + k_{r,z} A_{r,y}) = \mu_2^{-1} k_{g,z} A_{g,y} \quad (2)$
 $\mu H_x = -ik_z A_y$

$k_{e,z} = -k_{r,z} = \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2} k_{g,z}$

Damit (2) $\rightarrow \frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha_1 (A_{e,y} - A_{r,y}) = \frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha_2 A_{g,y} \quad (2a)$

(1), (2a) \rightarrow zwei lineare Gleichungen für $A_{r,y}, A_{g,y}$ (bei gegebener Amplitude $A_{e,y}$)

\Rightarrow

$$\frac{E_{g,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{g,y}}{A_{e,y}} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_{r,y}}{A_{e,y}} = \frac{A_{r,y}}{A_{e,y}} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_2} \quad \text{---} = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}$$

Üblicherweise $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$

$$\rightarrow \frac{E_{g,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{g,y}}{A_{e,y}} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_{r,y}}{E_{e,y}} = \frac{A_{r,y}}{A_{e,y}} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Fresnel'sche Formel

Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$; $|\vec{S}| \propto \frac{n}{\mu} E^2 \stackrel{\mu=1}{=} nE^2$

Reflexionskoeffizient

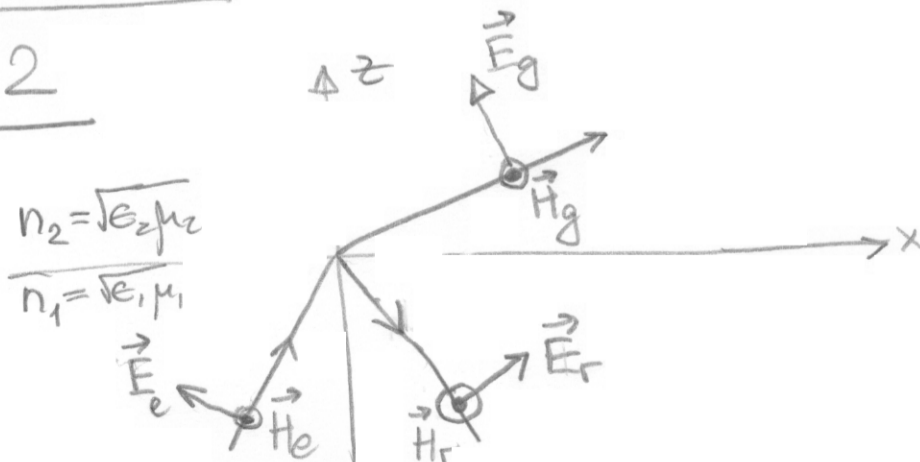
$$R = \frac{|S_{r,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{E_{r,y}^2}{E_{e,y}^2} \stackrel{\mu=1}{=} \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{|S_{g,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \frac{n_2}{n_1} \frac{E_{g,y}^2}{E_{e,y}^2} = \frac{4n_1 n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2} = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$T = 1 - R$$

Polarisation 2



Randbedingungen (analog zu Polarisation 1) → Übung →

$$\frac{H_{r,y}}{H_{e,y}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \xrightarrow{\mu_1 = \mu_2 = 1} \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{H_{g,y}}{H_{e,y}} = \frac{2 \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \xrightarrow{\mu_1 = \mu_2 = 1} \frac{2 n_2 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\xrightarrow{\mu_1 = \mu_2} \frac{2 n_2 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{2 \sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2}$$

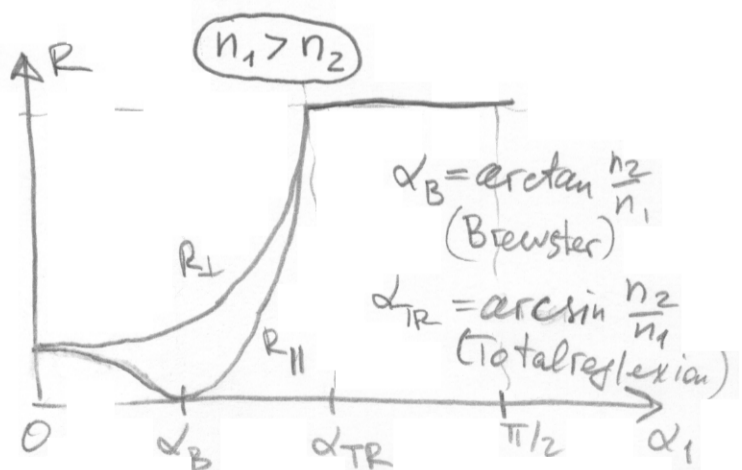
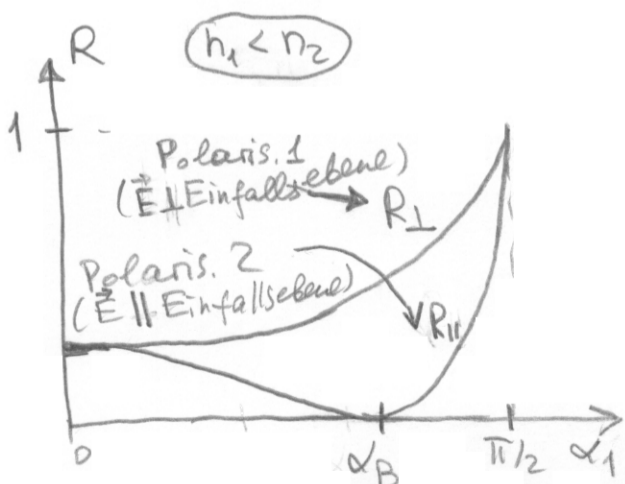
Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|S_{r,z}|}{|S_{e,z}|} = \frac{H_{r,y}^2}{H_{e,y}^2} = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow R = 0 \quad \text{Keine Reflexion! (für Polarisation 2)}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 &= \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad \text{— Brewster - Winkel}$$



Für $\alpha_1 = 0$ (und damit auch $\alpha_2 = 0$)

$$R_{\perp} = R_{\parallel} \equiv R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

⑨ Brechung und Reflexion an der Grenze mit absorbierendem Medium

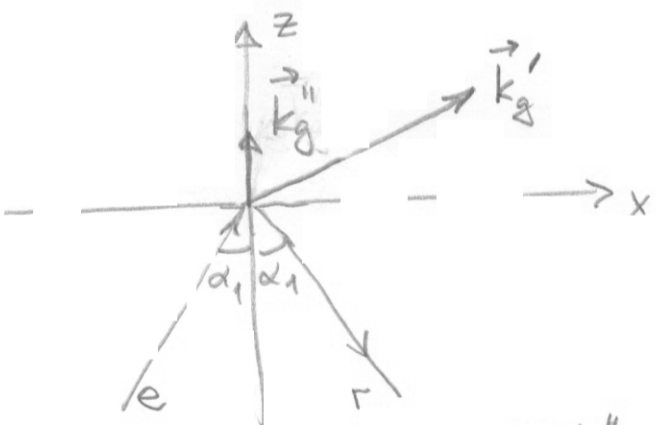
$\mu_1 = \mu_2 = 1$
 $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \in \mathbb{R}$
 $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = n_{2r} + i\alpha_2$

Beispiel

$$\vec{k}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \stackrel{m=1}{=} \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}$$

ϵ komplex $\rightarrow \vec{k}$ komplex ; $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$
↑ ↑
reell

allgemeine situation:
 \vec{k}' und \vec{k}'' haben verschiedene Richtungen



$$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = \vec{A}_e e^{i(\vec{k}_e \vec{r} - \omega t)} \text{ usw}$$

$$\begin{cases} k_{e,x} = k_{r,x} = k_{g,x} = k_x \\ k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y \\ \text{Wir wählen } k_y = 0 \text{ (Einfallsebene)} \end{cases}$$

wie ohne Absorption

$$\Rightarrow k_{g,x} = 0 \Rightarrow \vec{k}_g \parallel \vec{e}_z$$

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

$$k_x = \begin{cases} k_{e,x} = k_e \sin \alpha_e = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_e \\ k_{r,x} = k_r \sin \alpha_r = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_r \\ k_{g,x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_r = \alpha_e \equiv \alpha_1$$

$$k_{g,x} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_1$$

$$k_g^2 = \epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow k_{g,z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1} \in \mathbb{C}$$

$$k_{g,z}'' = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}$$

bestimmt die exponentielle Dämpfung der gebrochenen Welle in z-Richtung

Eindringtiefe

$$d = \frac{1}{k_{g,z}''} \xrightarrow{\alpha_1=0} \frac{c}{\omega} \frac{1}{\operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\omega \alpha_2}$$

Intensitätsbeziehungen:

Man kann zeigen, dass die Fresnelsche Formel sind auch mit Absorption richtig, man muß nur R als $|\underline{r}|^2$ betrachten
 $\underline{r} \in \mathbb{C}$

Polarisation \perp (R_{\perp}):

$$R = \left| \frac{n_1 \cos \alpha_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}}{n_1 \cos \alpha_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}} \right|^2 \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i}$$

$$\alpha_1 = 0 \rightarrow R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2 - i\alpha_2}{n_1 + n_2 + i\alpha_2} \right|^2$$

(10) Elektromagnetische Wellen in Metallen

In einem Metall gibt es frei bewegliche Elektronen.

Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$: $\vec{J}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)$; $\sigma(0) > 0$
 (DC Limit)

Maxwell-Gl.:

$$\begin{aligned} i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{k}, \omega) \\ i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon(\omega) - \frac{4\pi}{i\omega} \sigma(\omega) \right) \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \vec{D}(\vec{k}, \omega) &= \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) \\ \epsilon(\vec{k}, \omega) &\approx \epsilon(\omega) \end{aligned} \right.$$

-128-

$$\epsilon_{\Sigma}(\omega) = \epsilon(\omega) - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega}$$

↑ gebundene Elektronen
↑ induzierte freie Elektronen

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \epsilon(0) = \text{const} \\ \epsilon_{\Sigma}(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\frac{4\pi\sigma(0)}{i\omega} \rightarrow i\infty \end{aligned}$$

Wir können ϵ_{Σ} als dielektrische Funktion eines leitenden Mediums betrachten. Damit unterteilen wir Ladungen wie folgt

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{ind}} ; \quad P_{\text{ind}} = P_{\text{geb}} + P_{\text{ind. frei}}$$

↑ externe Ladungen ↑ induzierte
↑ gebundene ↑ induzierte freie

(In einem Dielektrikum $P_{\text{ind. frei}} = 0$, so dass $P_{\text{ind}} = P_{\text{geb}}$)

Unten werden wir ϵ_{Σ} wieder als ϵ bezeichnen. Bei dieser Schreibweise ist ρ in der makroskopischen Maxwell-Gl. $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$ die Dichte von externen Ladungen, da induzierte freie Ladungen betrachten wir jetzt als Polarisationsladungen und berücksichtigen sie in $\epsilon(\omega)$.

Damit ist die Beschreibung von el/mag Wellen in Metallen und Dielektrika völlig einheitlich.

Bei $\omega \neq 0$ gibt es kein qualitativen Unterschied zwischen Leitern und Dielektrika

Drude - Modell

Wir erweitern das Lorentz Modell:
noch eine Art der Oszillatoren, die den freien Elektronen entspricht: $\omega_f = 0$; $\gamma_f = 1/\tau$

$$m\left(\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau}\dot{\vec{r}}\right) = q\vec{E}(t), \quad q = -e$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \underbrace{\sum_j \frac{4\pi n_j e^2}{m_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)}}_{\epsilon_{geb}(\omega)} + 4\pi \frac{n_f e^2}{m(-\omega^2 - i\omega/\tau)}$$

Wir vergleichen $\epsilon(\omega) = \epsilon_{geb}(\omega) - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega}$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{geb}(\omega) + \frac{4\pi n_f e^2}{m(-\omega^2 - i\omega/\tau)}$$

$$\Rightarrow \left[\sigma(\omega) = \frac{n_f e^2}{m} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \right] \text{ Drude-Formel}$$

Grenzfall $\omega\tau \ll 1$: $\sigma(\omega) \stackrel{\omega\tau \ll 1}{\approx} \frac{n_f e^2 \tau}{m} \equiv \sigma_D$ dc Drude-Leitfähigkeit

[allgemeine ω : Drude-Formel $\rightarrow \sigma(\omega) = \frac{\sigma_D}{1 - i\omega\tau}$]

$$\epsilon(\omega) \stackrel{\omega\tau \ll 1}{\approx} \epsilon_{geb} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}$$

Wenn auch $\omega \ll \sigma_D$, dann

$$\epsilon(\omega) \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}; |\epsilon(\omega)| \gg 1$$

Wir definieren

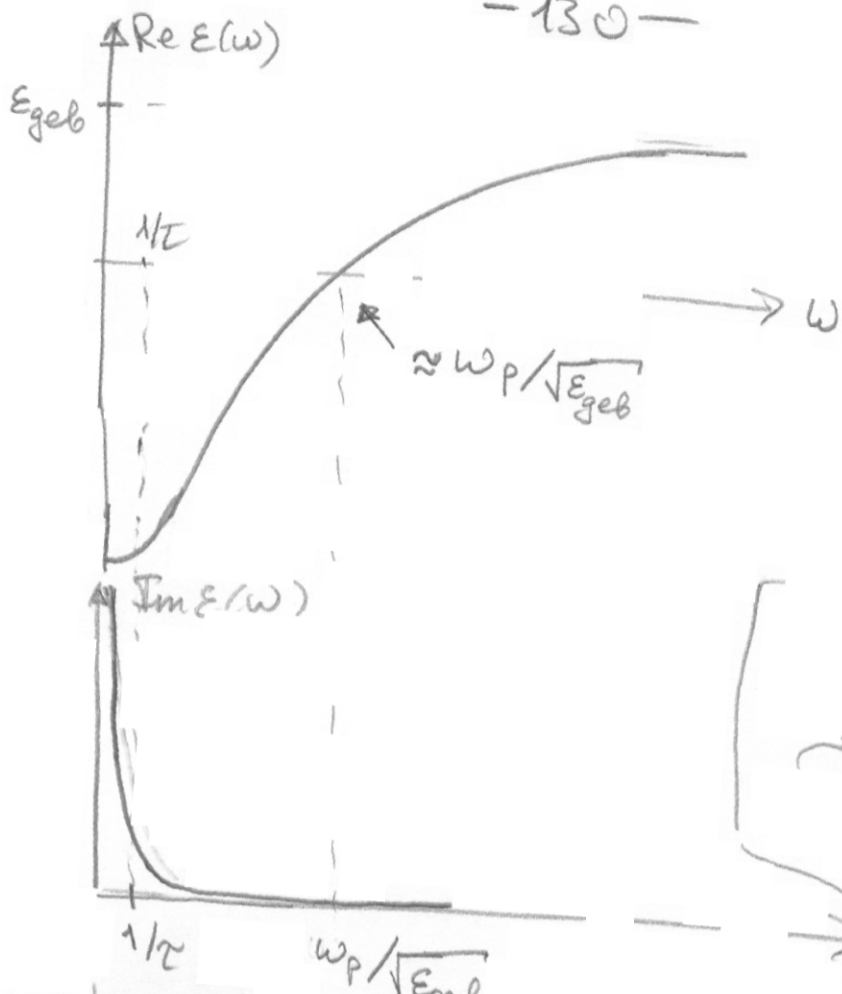
$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m}} \text{ - Plasma-Frequenz}$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}$$

\uparrow reelle Konstante ~ 1
für niedriges ω

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = \epsilon_{geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}}; \quad \text{Im } \epsilon(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau^{-1}}{\omega(\omega^2 + \tau^{-2})}$$

Für gute Leiter
 $\sigma_D \tau \gg 1$,
 d.h. aus $\omega\tau \ll 1$
 folgt $\omega \ll \sigma_D$
 Beispiel Kupfer
 $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$
 $\sigma_D = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$
 $\sigma_D \tau = 1.5 \cdot 10^4 \gg 1$
 $\omega_p = 1.7 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$



- $\omega \ll 1/\tau$
- $1/\tau \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$
- $\omega > \omega_p/\sqrt{\epsilon_{\text{geb}}}$

Wir untersuchen jetzt verschiedene Frequenzbereiche:

• Skin-Effekt

$\omega\tau \ll 1$
und damit
 $\omega \ll \sigma_D$

$$\epsilon \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}$$

; $|\epsilon| \gg 1$,
 ϵ - (fast) rein imaginär

Reflexion an der Oberfläche:

z.B. mit Vakuum; $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon$

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right|^2 \approx 1$$

$$\sqrt{\epsilon} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi\sigma_D}{\omega}}$$

Eindringtiefe $d = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\text{Im}\sqrt{\epsilon}} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma_D\nu}}$

z.B. für $\nu = 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ und für Kupfer erhalten wir

$$d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

Skin-Effekt: das Feld kann nur in die äußerste Oberfläche des Leiters eindringen

• Reflexivität im Sichtbaren — Transparenz im Ultravioletten

$\omega \tau \gg 1$

$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

(wir vernachlässigen hier $\text{Im } \epsilon(\omega)$, da in diesem Bereich $\text{Im } \epsilon(\omega) \ll |\text{Re } \epsilon(\omega)|$)

$\left\{ \begin{array}{l} < 0 & \text{für } \omega < \omega_p / \sqrt{\epsilon_{geb}} \\ > 0 & \text{für } \omega > \omega_p / \sqrt{\epsilon_{geb}} \end{array} \right.$

Damit $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \begin{cases} i\alpha = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \epsilon_{geb}}, & \omega < \omega_p / \sqrt{\epsilon_{geb}} \\ & \text{(imaginär)} \\ n_r = \sqrt{\epsilon_{geb} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, & \omega > \omega_p / \sqrt{\epsilon_{geb}} \\ & \text{(reell)} \end{cases}$

• $\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_{geb}}} \rightarrow \epsilon < 0 \rightarrow n = i\alpha$ (imaginär) $\rightarrow R = \left| \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha} \right|^2 = 1$

volle Reflexivität ; Metall = Spiegel
im sichtbarem Licht

• $\omega > \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_{geb}}} \rightarrow \epsilon > 0 \rightarrow n = n_r$ (reell) $\rightarrow R = \left| \frac{1 - n_r}{1 + n_r} \right|^2 < 1$

Metall wird durchsichtig im Ultravioletten