Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin

Dr. Igor Gornyi

Blatt 4: Lösungen

Besprechung 7.11.2012

Aufgabe 1: **Kugel** (2+2+2+2+2+4=14 Punkte)

(a) Da die leitende Kugel geerdet ist, gilt für das Potential im Innenraum K_R, $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Wir berechnen nun das Potential im Außenraum $\bar{K}_R^C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \; |\mathbf{r}| > R\}$ mit der Methode der Spiegelladung.
Wir fügen eine fiktive Spiegelladung q' im Innenraum der Kugel hinzu, deren Potential im Außenraum die Laplace-Gleichung erfüllt, also eine homogene Lösung darstellt. Diese Lösung wird so gewählt, dass das Gesamtpotential das Randwertproblem löst. Die Spiegelladung beschreibt dabei das Potential der auf dem Rand des Gebietes $\bar{K}_R^C$ induzierten Oberflächenladung.

Da das Problem symmetrisch bezüglich Rotationen um die z-Achse ist kann die Spiegelladung ebenfalls nur auf der z-Achse liegen. Wir bezeichnen die Position der Spiegelladung mit $\mathbf{a}' = a'\mathbf{e}_z$, wobei $|a'| < R$ gilt und $\mathbf{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung bezeichnet. Das Potential im Außenraum ist nun gegeben durch die Überlagerung beider Potentiale,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - a'\mathbf{e}_z|}\right) . \tag{1}$$

Die Konstanten a' und q' sind aus der Randbedingung $\phi(|\mathbf{r}| = R) = 0$ zu berechnen. Dazu betrachten wir die zwei Punkte $\mathbf{r} = \pm R\mathbf{e}_z$ in Gl. (1). Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\frac{q}{a - R} = \frac{-q'}{R - a'} , \tag{2}$$

$$\frac{q}{a + R} = \frac{-q'}{a' + R} . \tag{3}$$

Man erkennt unmittelbar, dass $\mathrm{sign}(q) = -\mathrm{sign}(q')$ gilt. Teilt man nun Gl. (2) und (3) durcheinander so erhält man

$$a' = \frac{R^2}{a} < R . \tag{4}$$

Einsetzen in Gl (2) gibt die Spiegelladung

$$q' = -q\,\frac{R}{a} . \tag{5}$$

Wir setzen die Konstanten aus Gl. (4) und (5) in das Potential (1) ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-a\mathbf{e}_z|} - \frac{R/a}{\left|\mathbf{r}-\frac{R^2}{a}\mathbf{e}_z\right|}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}-2\frac{r}{a}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2}+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{a}\cos(\theta)}}\right) \qquad (6) \\
&= \frac{\bar{q}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{r}^2-2\bar{r}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{R}^2+\frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2}-2\bar{r}\cos(\theta)}}\right) .
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir das Potential in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) geschrieben, wobei wir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z = r\cos(\theta)$ benutzen. In der letzten Zeile haben wir die dimensionslosen Variablen $\bar{r} = r/a$, $\bar{R} = R/a$ eingeführt und schreiben $\bar{q} = q/4\pi\epsilon_0$.

(b) Das elektrische Feld ist gegeben durch $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$, wobei wir den ∇-Operator in Kugelkoordinaten verwenden

$$\nabla = \mathbf{e}_r\,\partial_r + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{r}\,\partial_\theta + \mathbf{e}_\phi\,\frac{1}{r\sin(\theta)}\,\partial_\phi\,. \qquad (7)$$

Wir wollen das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche, also für $r \searrow R$ berechnen. Das Potential (6) hängt nicht vom Azimutalwinkel φ ab, daher verschiwndet die Komponente des elektrisches Feldes in Richtung $\mathbf{e}_\phi$.

Die Ableitung des Potentials nach dem Polarwinkel θ verschwindet ebenfalls auf der Kugeloberfläche,

$$-\partial_\theta\phi(\mathbf{r})|_{\bar{r}\propto\bar{R}} = \left[\frac{\bar{r}\sin(\theta)}{(1+\bar{r}^2-2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}} - \frac{\bar{r}\sin(\theta)}{(\bar{R}^2+\bar{r}^2/\bar{R}^2-2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}}\right]_{\bar{r}=\bar{R}} = 0\,. \qquad (8)$$

Damit ist das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche parallel zu $\mathbf{e}_r$ und gegeben durch

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}})|_{r=R} = -\mathbf{e}_r\,\frac{1}{a}\,\frac{\partial\phi}{\partial\bar{r}}\bigg|_{r=R} = -\mathbf{e}_r\,\frac{\bar{q}}{a}\,\frac{1-\bar{R}^2}{\bar{R}[1+\bar{R}^2-2\bar{R}\cos(\theta)]^{3/2}}\,. \qquad (9)$$

Oder ausgedrueckt durch, R, a, q und r,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r=R} = \mathbf{e}_r\,\frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a^2-R^2}{R[a^2+R^2-2aR\cos(\theta)]^{3/2}}\,. \qquad (10)$$

(c) Aus dem Potential (6) ergibt sich die Kraft, welche auf die Punktladung q wirkt. Dabei muss die unendliche Selbstwechselwirkung (der erste Term in Gl. (6)) ignoriert werden. Die Ladung q erfährt daher nur die Kraft hervorgerufen durch die Oberflächenladung, welche äquivalent zur Bildladung ist,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{Bildl.}}(a\mathbf{e}_z) = -q\mathbf{e}_r\,\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\,\frac{-\bar{q}}{\sqrt{\bar{R}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2}-2\bar{r}\cos(\theta)}}\Bigg|_{r=a} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{aR}{(a-R^2/a)^2}\,. \qquad (11)$$

Die Ableitung $\partial_\theta\phi$ verschwindet im Punkt $r = a$, $\theta = 0$.

(d) Nach dem Gaußschen Gesetz ist die Oberflächenladung σ auf der Kugeloberfläche gegeben durch die Unstetigkeit des elektrischen Feldes an der Grenzschicht mit Normalen $\pm\mathbf{e}_r$,

$$\sigma = \epsilon_0\,\mathbf{e}_r \cdot \left[\mathbf{E}(r \searrow R) - \mathbf{E}(r \nearrow R)\right] \;. \tag{12}$$

Da das elektrische Feld im Innenraum verschwindet erhalten wir mit der Gl. (10)

$$\sigma_{\text{Oberfl.}} = \frac{-q}{4\pi}\,\frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}} \;. \tag{13}$$

Und für die gesamte Oberflächenladung erhalten wir durch Integration von Gl. (13),

$$\begin{aligned} Q_{\text{Oberfl.}} &= -\frac{q}{4\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos(\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, R^2\, \frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}} \\ &= -\frac{q}{2}\,\frac{(a^2 - R^2)}{2a} \int_{-2aR}^{2aR} \mathrm{d}z\, \frac{1}{[a^2 + R^2 - z]^{3/2}} = -q\,\frac{R}{a} \;. \end{aligned} \tag{14}$$

Wie erwartet ist die gesamte Oberflächenladung gleich der Spiegelladung aus Gl. (5).

(e) Wenn die Kugel nicht geerdet ist, sondern auf dem Potential Φ_0 liegt, müssen wir zu dem Potential (6) im Außenraum eine Lösung $\phi_1(\mathbf{r})$ der Laplacegleichung addieren, welche im Unendlichen (Erde) verschwindet und auf der Kugeloberfläche den Wert ϕ_0 annimmt. Diese Lösung ist natürlich gegeben durch die Fundamentallösung

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0 R}{|\mathbf{r}|} \;. \tag{15}$$

Das gesamte Potential ist dann gegeben durch

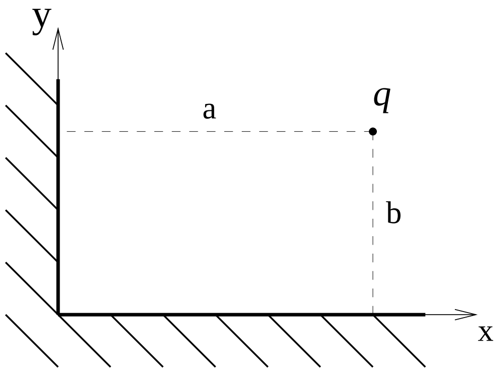
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\bar{q}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{R} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2} - 2\bar{r}\cos(\theta)}}\right) + \frac{\phi_0 \bar{R}}{\bar{r}} \;. \tag{16}$$

(f) Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für das Dirichlet'sche Randwertproblem auf $\bar{K}_R^C$ ist gegeben durch das Potential am Ort $\mathbf{r} \in \bar{K}_R^C$ hervorgerufen durch eine Punktladung am Ort $\mathbf{r}' \in \bar{K}_R^C$ mit Einheitsladung $q = 1$, welches zusätzlich die Randbedingung $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für $\mathbf{r} \in \partial K_R^C$ erfüllt.

Wenn wir in Gl. (6), $q = 1$ und $a = y'$ setzen ist das Potential die Greensche Funktion für den Spezialfall, dass $\mathbf{y}'$ auf der z-Achse liegt. Die allgemeine Greensche Funktion erhalten wir ganz einfach, indem wir Gl. (6) in rotationsinvarianter Form schreiben

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right]^{1/2}} - \frac{R/r'}{\left[\mathbf{r}^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right]^{1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{r}'^2\mathbf{r}^2}{R^2} + R^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right]^{1/2}}\right) \;. \end{aligned} \tag{17}$$

Wie auch immer wir unser Koordinatensystem rotieren, die Greensche Funktion hängt nur von dem relativen Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ ab und (17) ist bereits die



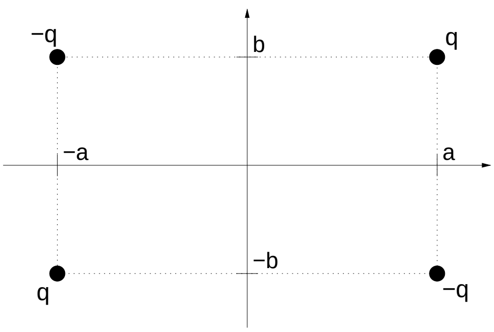


Abbildung 1:

gesuchte Lösung für allgemeine $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$.

Wir erhalten für die Ableitung in normalen Richtung $\mathbf{n}' = -\mathbf{e}_{r'}$ auf der Oberfläche $(r' = R)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\big|_{r'=R} &= -\mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{e}_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\big|_{r'=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - R^2}{R[r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta)]^{3/2}} \,.\end{aligned} \tag{18}$$

Aufgabe 2: **Leiterecke** (1+1+2+2+1+1+4=12 Punkte)

(a) Die Platten sind leitend, daher darf keine elektrische Feldkomponente in den Platten vorhanden sein. Das Potential ist konstant und wir wählen insbesondere $\Phi = 0$. Wir legen die Punktladung in die xy-Ebene und bezeichnen ihre Position mit $\mathbf{r}_0 = (a, b)^T$.
Die Spiegelladungen mit Ladung $\pm q$ liegen dann gemäß der Abb. 1 bei $\mathbf{r}_1 = (a, -b)^T$, $\mathbf{r}_2 = (-a, -b)^T$ und $\mathbf{r}_3 = (-a, b)^T$. Ihre Ladungen sind: $q_1 = -q$, $q_2 = q$, $q_3 = -q$.

(b) Das Gesamtpotential ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{3} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) .\end{aligned} \tag{19}$$

And den Rändern des Gebietes ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi(0, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} &\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) = 0 \,,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\phi(x,0,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}}\right) = 0\,. \tag{21}$$

(c) Es gilt

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{x=0} = 0\,, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\right)\,. \tag{23}$$

Das elektrische Feld steht also senkrecht auf den Platten und ist für $x=0$ gegeben durch

$$\mathbf{E}(0,y,z) = -\mathbf{e}_x\,\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\right)\,. \tag{24}$$

Und ebenso erhalten wir für die Platte in der xz-Ebene,

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{y=0} = 0\,, \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{bq}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right)\,, \tag{26}$$

$$\mathbf{E}(x,0,z) = -\mathbf{e}_y\,\frac{bq}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right)\,. \tag{27}$$

(d) Die Oberflächnladungsdichte ergibt sich wieder aus dem Sprung des elektrischen Feldes (siehe Aufgabe 1d). Das Feld in den Platten verschwindet und wir erhalten

$$\sigma(0,y,z) = -\frac{aq}{2\pi}\left(\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\right)\,, \tag{28}$$

$$\sigma(x,0,z) = -\frac{bq}{2\pi}\left(\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right)\,. \tag{29}$$

(e) Die gesamte Oberflächenladung in der xz-Ebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= -\frac{bq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\left(\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{bq}{2\pi}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\,\frac{1}{[x^2+b^2+z^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{bq}{2\pi}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\,\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(b^2+x^2)[x^2+b^2+z^2]^{1/2}}\right) \\ &= -\frac{bq}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{2\mathrm{d}x}{(b^2+x^2)} = -\frac{q}{\pi}\int_{-a/b}^{+a/b}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)} \\ &= -\frac{2q}{\pi}\arctan(a/b)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

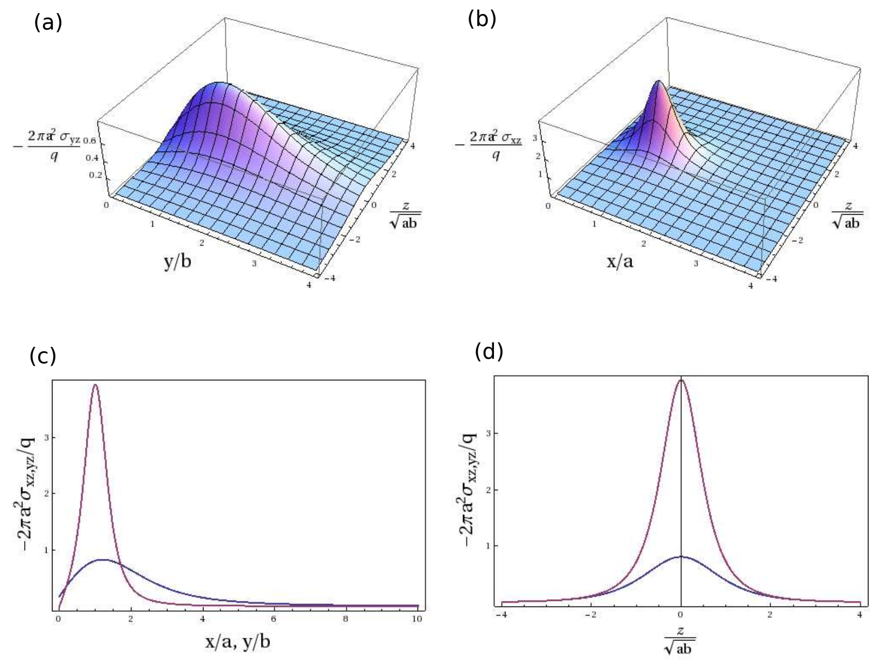


Abbildung 2: Die Ladungsdichte in der yz-Ebene (a) und in der xz-Ebene (b). Abb. (c) zeigt die Ladungsdichte in den beiden Ebenen für $z = 0$ in Abh. von x/a und y/b. Die Ladungsdichte in der zx-Ebene ist rot dargestellt diejenige in der yz-Ebene blau. Abb. (d) zeigt die Ladungsdichte in Abh. von z für $x/a = y/b = 1$. Die Kurven sind berechnet für $a/b = 2$.

Entsprechend erhalten wir in der yz-Ebene

$$\begin{aligned} Q_{yz} &= -\frac{aq}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \left(\frac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{aq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \int_{-b}^{b} \mathrm{d}y \, \frac{1}{[a^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{2q}{\pi}\arctan(b/a)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $a \gg b$ erhalten wir $Q_{xz} \simeq -q$ und $Q_{yz} \simeq 0$.

(f) Die Punktladung erfährt die Kraft gegeben durch die Spiegelladungen,

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{3} \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,, \tag{32}$$

$$F_x = -q\mathbf{e}_x \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{a}{4}\left(\frac{\cos(\varphi)}{\rho^3} - \frac{1}{a^3}\right)\,, \tag{33}$$

$$F_y = -q\mathbf{e}_y \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{b}{4}\left(\frac{\sin(\varphi)}{\rho^3} - \frac{1}{b^3}\right)\,. \tag{34}$$

Hierbei bezeichen (φ,ρ) die ebenen Polarkoordinaten der Punktladung in der xy-Ebene: $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan(\varphi) = b/a$.

(g) Wir entwickeln die Terme in Gl. (19) für $r \gg |\mathbf{r}_i|$, wobei wir mit $|\mathbf{r}_i|$ wieder die Position der i-ten Ladung bezeichnen (s. Skizze).

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} =& \frac{1}{\sqrt{r^2+r_i^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}} \simeq \frac{1}{r}\left(1-\frac{\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_i-2\mathbf{r})}{2r^2}+\frac{3[\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_i-2\mathbf{r})]^2}{8r^4}\right) \\ =& \frac{1}{r}\left(1-\frac{\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_i-2\mathbf{r})}{2r^2}+\frac{3|\mathbf{r}_i|^4}{8r^4}+\frac{3\mathbf{r}_i^2(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r})}{2r^4}+\frac{3(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r})^2}{2r^4}\right)\,.\end{aligned} \tag{35}$$

Nur der letzte Term trägt nach der Summe über i bei, da

$$\sum_{i=0}^{3} q_i = \sum_{i=0}^{3} q_i\mathbf{r}_i = 0\,, \tag{36}$$

und $\mathbf{r}_i^2 = \mathit{const}$ gilt. Das Potential für $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_i|$ ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=0}^{3}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=0}^{3}\frac{q_i}{r^5}\frac{3(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r})^2}{2} \\ =& \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{3}{r^5}\quad \mathbf{r}^T\left(\sum_{i=0}^{3} q_i\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i^T\right)\mathbf{r} \\ =& \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{3}{r^5}\quad \mathbf{r}^T\begin{pmatrix}0 & 4ab & 0\\ 4ab & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{r} \\ =& \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{3ab}{r^5}\quad \mathbf{r}^T\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{r} = \frac{3qab}{\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5}\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Aufgabe 3: **Keil** (1+3=4 Punkte)

(a) Es müssen sieben Spiegelladungen mit Ladung $\pm q$ gemäß der Abb. 3 verwendet werden. Hierbei sei die Position der Punktladung gegeben durch (a, b), wobei $b < a$ gilt.

(b) Das Potential ist gegeben durch die Überlagerung der Potentiale der Punktladung und ihrer Bildladungen,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2+(y+a)^2}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+(y+a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+(y-a)^2}}\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{38}$$

Für $x = 0$ und für $x = y$ überzeugt man sich leicht, dass das Potential verschwindet.

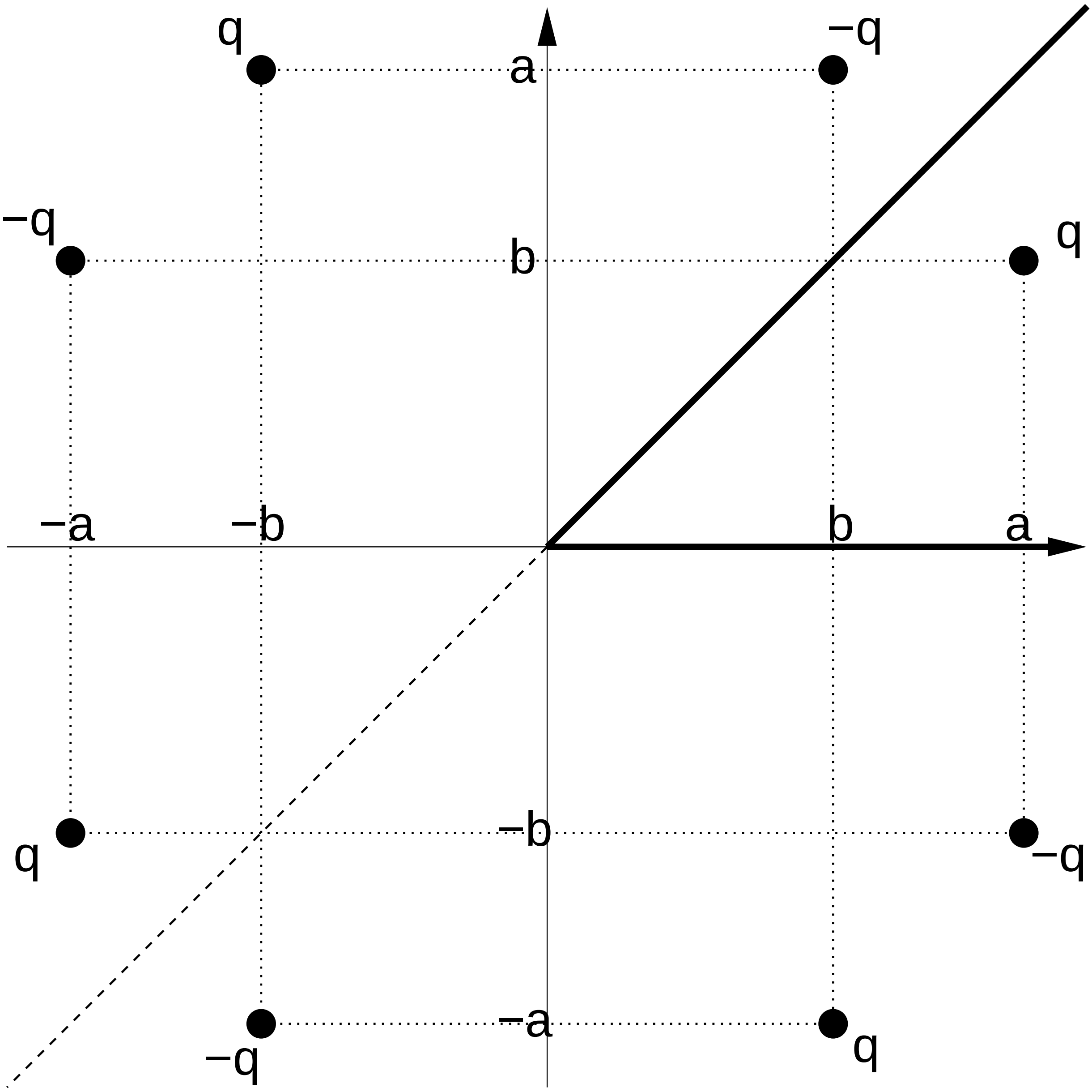


Abbildung 3: