Theorie der Kondensierten Materie I WS 2012/2013

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. Orth, Dr. S. Syzranov

Blatt 2
Besprechung 26.10.2012

---

1. Ideales Bose Gas (5 + 10 + 5 + 5 = 25 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir die statistische Mechanik des idealen Bose Gases. Der Hamilton Operator des idealen Bose Gases lautet $H = \sum_{\boldsymbol{k},s} \epsilon_{\boldsymbol{k},s} n_{\boldsymbol{k},s}$ mit Dispersionsrelation $\epsilon_{\boldsymbol{k},s} = \frac{\hbar^2}{2m}|\boldsymbol{k}|^2$ und $n_{\boldsymbol{k},s}$ ist die Besetzungszahl des Zustands mit Wellenvector $\boldsymbol{k}$ und möglichen anderen Quantenzahlen s. In $d = 3$ gilt $\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(l_x, l_y, l_z)$ mit $l_\alpha \in \mathbb{Z}$.

(a) Leiten Sie den Ausdruck für das *grosskanonische Potential* $\Omega = -k_B T \log Z_g$ beginnend von der grosskanonischen Zustandssumme $Z_g = \mathrm{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)}$ her.

(b) Berechnen Sie die Entropie $S = -\partial\Omega/\partial T$ und drücken Sie diese allein durch die Bose-Funktion $n_B = 1/\{\exp[\beta(\epsilon] - \mu) - 1\}$ aus. Vergleichen Sie mit dem Ausdruck für Fermionen aus Übungsblatt 1.

(c) Berechnen Sie die Teilchenzahl $N = -\partial\Omega/\partial\mu$.

(d) Berechnen Sie die innere Energie aus der Relation $E = TS + \mu N - pV$. Das Ergebnis sollte Ihnen bekannt vorkommen.

2. Bose-Einstein Kondensation (5 + 5 + 10 + 5 = 25 Punkte)

In dieser Aufgabe behandeln wir das faszinierende Phänomen der Bose-Einstein Kondensation, für dessen Realisierung in Alkali-Atomgasen es 2001 den Physik Nobelpreis gab (`www.nobel.se`).

(a) Betrachten Sie ein ideales Bose-Gas in $d = 3$ Dimensionen. Welche Werte kann das chemische Potential $\mu(T)$ überhaupt annehmen für Bosonen und warum ? Berechnen Sie $\mu(T)$ wie üblich aus der Normierungsbedingung $N = \sum_{k,s} n_{k,s}$.
Bestimmen Sie dann die maximale Anzahl der Teilchen $N_{ex}^{\max}$, die in den angeregten Zuständen, d.h. der Gesamtheit aller Zustände ausser dem Grundzustand, bei einer gegebenen Temperatur T untergebracht werden können.
Was geschieht wenn Sie (bei fester Temperatur) mehr Teilchen in das System geben.

(b) Nun halten Sie die Teilchenzahl N fest und bestimmen Sie die Bose-Einstein Übergangstemperatur T_c aus $N_{\mathrm{ex}}^{\max}\big(T = T_c\big) = N$. Was geschieht wenn Sie die Temperatur weiter erniedrigen ? Bestimmen Sie $N - N_{ex}(T)$.

(c) Bestimmen Sie die innere Energie und die spezifische Wärme im Fall $T < T_c$.

(d) Betrachten Sie nun ein ideales Bose-Gas in $d = 2$ Dimensionen. Bestimmen Sie wiederum $\mu(T)$ aus der Normierungsbedingung auf die gesamte Anzahl der Teilchen. Was passiert im Grenzfall $N \to \infty$ bei festem T. Bestimmen Sie erneut die Bose-Einstein Übergangstemperatur T_c.

3. Drei Bosonen mit Spin (15 + 15 = 30 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir drei bosonische Teilchen, die ganzzahligen Spin S besitzen. Mit $\phi_\lambda(\boldsymbol{x}, \sigma) = \varphi_\lambda(\boldsymbol{x})\chi_\sigma$ bezeichnen wir normierte Einteilchen-Eigenfunktionen, wobei $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})$ den Ortsorbitalanteil beschreibt und χ_σ mit $\sigma \in \{-S, \dots, S\}$ die Spinwellenfunktion. Die Variable λ beschreibt einen Satz vollständiger Quantenzahlen. Man benutzt oft folgende kompakte Notation $i = (\boldsymbol{x}_i, \sigma_i)$ mit $i = 1, 2, 3$.

(a) Finden Sie die normierten Vielteilchen-Wellenfunktionen von drei identischen Bosonen, die die Einteilchenzustände λ_1, λ_2 und λ_3 besetzen. Das Ergebnis hängt davon ab ob diese Zustände gleich oder verschieden sind. Betrachten Sie alle möglichen Fälle.

(b) Betrachten Sie nun den Fall von drei identischen Bosonen, die jeweils den Spin $S = 1$ besitzen und die gleiche Orbitalwellenfunktion $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})$ besetzen. Finden Sie alle normierten Vielteilchenfunktionen und bestimmen Sie die Anzahl der unabhängigen Zustände für die verschiedenen möglichen Spinkonfigurationen.

4. Logarithmisches Einteilchen-Spektrum (5 + 15 = 20 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N nicht-wechselwirkenden Teilchen, die jeweils ein logarithmisch verteiltes Energiespektrum der Form

$$E_n = \Delta \ln(n), \; n = 1, \dots \infty$$

besitzen.

(a) Bestimmen Sie die Zustandssumme Z im Fall von Temperaturen $k_B T < \Delta$.

(b) Finden Sie die führende Temperaturabhängigkeit der Entropie S und der spezifischen Wärme c_V für Temperaturen $k_B T \approx \Delta$.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch. Insbesondere, was können wir aus dem Verhalten der spezifischen Wärme über den Temperaturbereich $k_B T > \Delta$ schliessen. Es ist instruktiv sich auch die Zustandsdichte dn/dE des Systems anzuschauen.

Ein interessanter Artikel in diesem Zusammenhang findet sich hier:
`www.http://en.wikipedia.org/wiki/Hagedorn_temperature`.