Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 4
Abgabe 22.11.2013

---

1. Kronecker und Levi-Civita Symbole $(10 + 5 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 = 50$ Punkte)

In der Vorlesung wurde das Kronecker Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{1}$$

sowie das Levi-Civita Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ oder zyklische Permutation davon} \\ -1 & \text{, falls } (i,j,k) = (2,1,3) \text{ oder zyklische Permutation davon} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{2}$$

eingeführt. Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ in drei Dimensionen kann man damit schreiben als $c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i$, etc. mit orthonormaler rechtshändiger Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

(a) Beweisen Sie die Relation $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

(b) Wie verhält sich das Kreuzprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ unter einer (aktiven) Inversion der Vektoren $\boldsymbol{a} \to -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \to -\boldsymbol{b}$?

(c) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(d) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ das Volumen eines Parallelepipeds mit Seitenlängen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ist. Was passiert im Falle, daß zwei Vektoren parallel sind ?

(e) Die Determinante einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_{1,i} a_{2,j} a_{3,k} \,. \tag{4}$$

Benutzen Sie Aufgabenteil (d) um der Determinantenfunktion eine anschauliche Interpretation zu geben. Was ist die Determinante einer Matrix, in der zwei Zeilen oder Spalten Vielfache voneinander sind ?

(f) Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

(g) Berechnen Sie $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$ sowie $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2$.

2. Kugelkoordinaten (5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten ist definiert durch

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{5}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{6}$$
$$z = r \cos\theta \,. \tag{7}$$

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren der Kugelkoordinaten $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ mit $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{e}_\theta = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\theta/|\partial\boldsymbol{e}_r/\partial\theta|$ und $\boldsymbol{e}_\phi = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\phi/|\partial\boldsymbol{e}_r/\partial\phi|$.

(b) Drücken Sie den Ortsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

(c) Drücken Sie den Geschwindigkeitsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

(d) Drücken Sie den Beschleunigungsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

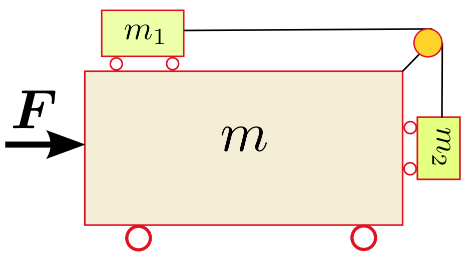
3. Kräfte (15 Punkte)

Wie groß muss die horizontale Kraft F in Abb. 1 (links) sein, die ständig auf m ausgeübt werden muss, damit sich m_1 und m_2 relativ zu m nicht bewegen ? Vernachlässigen Sie die Reibung.

4. Stabile Lage (15 Punkte)

Ein Brett mit dem Masse m und der Länge $\sqrt{3}R$ liegt in einer glatten, kreisförmigen Mulde mit dem Radius R. An dem einen Ende des Bretts befindet sich eine kleine Masse $m/2$. Berechnen Sie den Winkel θ (siehe Abb. 1 rechts), in dem das Brett liegt, wenn es sich im Gleichgewicht befindet.

Hinweis: der Schwerpunkt des Bretts mit der daraufliegenden Masse berechnet sich aus der Formel $x_{CM} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ wobei x_1 und x_2 die Abstände der beiden Massen m_1 und m_2 von einem festgelegten Punkt (z.B. dem Mittelpunkt des Bretts) sind. Die Masse des Brettes alleine liegt dabei offensichtlich im Mittelpunkt des Bretts.



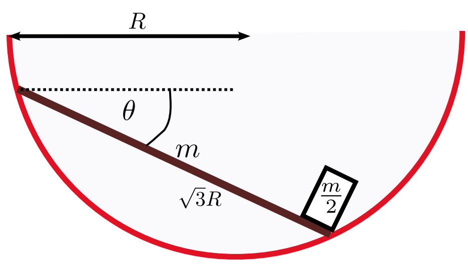


Abbildung 1: Links: Abbildung für Aufgabe 3. Rechts: Abbildung für Aufgabe 4.