**Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014**

**Prof. Dr. J. Schmalian**
**Dr. P. P. Orth**

**Blatt 10, 100 Punkte**
**Abgabe 17.01.2014**

---

**1. Schiefe Ebene** $(10 + 10 = 20$ Punkte$)$

Zwei massive Blöcke gleicher Masse $m = 3$ kg sind über eine Feder mit Federkonstante $D = 200$ N/m miteinander verbunden und befinden sich auf einer schiefen Ebene, die einen Winkel von $\alpha = 15°$ mit der Horizontalen besitzt. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Block, der sich weiter oben auf der schiefen Ebene befindet und der Ebene lautet $\mu_1 = 0.3$, und der Reibungskoeffizient des anderern Blocks lautet $\mu_2 = 0.1$. Nach einer Weile bewegen sich die beiden Blöcke miteinander und erfahren die gleiche Beschleunigung.

(a) Berechnen Sie den Wert der Beschleunigung.

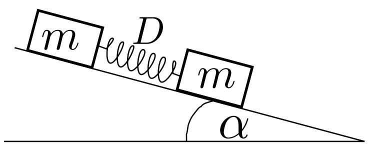
(b) Berechnen Sie die Ausdehnung der Feder aus der Gleichgewichtslage.

**2. Kraftstoß** $(5 + 15 = 20$ Punkte$)$

Ein Block der Masse $M = 5$ kg bewegt sich über eine horizontale Ebene. Ein kleineres Objekt der Masse $m = 1$ kg fällt von oben auf den Block mit einer vertikalen Geschwindigkeit von $v_m = 10$ m/s und bleibt fest auf dem Block haften. Die Geschwindigkeit des Blocks $M$ zum Zeitpunkt der Kollision beträgt $v_M = 2$ m/s. Nehmen Sie an, dass die Kollision instantan verläuft.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Blocks nach der Kollision im Falle einer reibungsfreien Ebene.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Blocks nach der Kollision für den Fall, dass die Ebene einen Reibungskoeffizienten $\mu = 0.4$ besitzt.



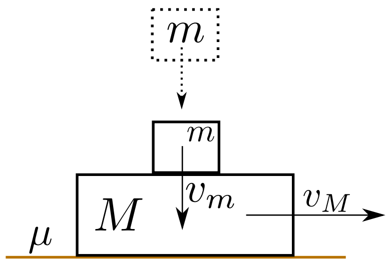




Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 1. Rechts: Abbildung zu Aufgabe 2.

**3. Die Dirac $\delta$-Funktion** $(5 + 10 + 5 + 10 = 30$ Punkte$)$

Die Dirac $\delta$-Funktion ist durch die Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn } x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

definiert. Intuitiv gilt, dass $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$. Im Folgenden sei $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$. Formal mathematisch handelt es sich nicht um eine Funktion, sondern um eine sogenannte Distribution, d.h. ein lineares mathematisches Objekt, dass einer Funktion (hier $f(x)$) eine Zahl (hier $f(x_0)$) zuordnet.

(a) Verwenden Sie die obengenannte Definition, um folgende Integrale auszuwerten

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(x)\delta(x) \tag{2}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(x)\delta(x) \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie durch Ihnen bekannte Integraltransformationsregeln, dass

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{4}$$

indem Sie zeigen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta(ax) = \frac{1}{|a|} f(0)\,. \tag{5}$$

(c) Man kann auch Ableitungen der $\delta$-Funktion definieren. Die erste Ableitung ist definiert durch

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta'(x) = -f'(0)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass diese Definition formal durch partielle Integration und den Eigenschaften der $\delta$-Funktion „folgt“. Wie würden Sie demnach die zweite Ableitung der $\delta$-Funktion $\delta''(x)$ definieren ?

(d) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^{\pi} dx\ \sin(x)\delta\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \tag{7}$$

$$\int_0^{\pi} dx\ \sin(x)\delta\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) \tag{8}$$

$$\int_{-1}^{1} dx\, e^{3x}\delta'(x) \tag{9}$$

$$\int_0^{\pi} dx\ \cosh(x)\delta''(x-1)\,. \tag{10}$$

**4. Darstellungen der $\delta$-Funktion** (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Man kann die $\delta$-Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge darstellen. Hier studieren wir zwei mögliche Funktionenfolgen.

(a) Lorentzfunktionsdarstellung: Zeigen Sie, dass die Lorentzfunktionenfolge

$$g_L(x,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} \tag{11}$$

im Limes $\alpha \to 0$ (z.B. $\alpha_n = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$) eine Darstellung der $\delta$-Funktion ist

$$\delta_L(x) = \lim_{\alpha\to 0} g_L(x,\alpha) \tag{12}$$

indem Sie zeigen, dass

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_L(x,\alpha) = \begin{cases} f(0) & \text{wenn } x_1 < 0 < x_2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{13}$$

(b) Gaußfunktionsdarstellung: Zeigen Sie, dass die Gaußfunktionenfolge

$$g_G(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} \tag{14}$$

im Limes $\alpha \to 0$ (z.B. $\alpha_n = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$) auch eine Darstellung der $\delta$-Funktion ist

$$\delta_G(x) = \lim_{\alpha \to 0} g_G(x, \alpha) \tag{15}$$

indem Sie zeigen, dass gilt

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_G(x, \alpha) = \begin{cases} f(0) & \text{wenn } x_1 < 0 < x_2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{16}$$

(c) Integral-Darstellung: Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x) \tag{17}$$

indem Sie zeigen, dass der Ausdruck

$$\lim_{\alpha \to 0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha|k|} \right) \tag{18}$$

die Lorentzfunktionenfolge $g_L(x, \alpha)$ von Aufgabenteil (a) liefert.