KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman | **Blatt 5**
PD Dr. B. Narozhny | **Lösungsvorschlag**

---

1. Fermigas bei $T = 0$:

Gegeben sei ein Gas aus N nichtwechselwirkenden fermionischen Teilchen mit Masse m und Spin $1/2$. Die Teilchen befinden sich in einem Volumen V bei Temperatur $T = 0$, bei der die Zustände bis zu einem Grenzimpuls p_F (Grenzenergie ϵ_F) besetzt sind. Betrachten Sie die folgenden drei Situationen:

Bestimmen Sie in allen Fällen die Fermienergie ϵ_F , den Fermiimpuls p_F , die innere Energie U und den Druck $P = -(\partial U/\partial V)_N$ als Funktion von N und V.

Um p_F ($\hbar = 1$) und ϵ_F als Funktion von N und V zu erhalten, berechnen wir $N(p_F)$, was sich mit der Fermiverteilung $n_F(\epsilon_p)$ darstellen lässt als

$$N = 2\sum_{\boldsymbol{p}} n_F(\epsilon_p),$$

mit einem Faktor 2 aus der Spinentartung $2s + 1 = 2$.

Meistens kann diese Summe durch ein Integral ersetzt werden, und zwar genau dann, wenn die typischen Impulse im System p_{typ} viel größer sind als die Impulsquantisierung $\sim \Delta p = 2\pi/L$. Bei Fermionen kann jeder Zustand nur einfach besetzt sein, die Größenordnung der typischen Impulse ist p_F. Für $N \gg 1$ Fermionen ist $p_F \gg 2\pi/L$ sicherlich erfüllt und wir können schreiben (in d Dimensionen)

$$\sum_{\boldsymbol{p}} \frac{(\Delta p)^3}{(\Delta p)^3} \cdots = \frac{1}{(\Delta p)^3} \sum_{\boldsymbol{p}} (\Delta p)^3 \cdots = \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d p \ldots .$$

Im Fermigas bei $T = 0$, im Grundzustand, sind alle Zustände bis zu einem Grenzimpuls p_F besetzt, die Fermifunktion wird zur Stufenfunktion, und dann

$$N = 2\frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d p n_F(\epsilon_p) = 2\frac{V}{(2\pi)^d} \Omega_d \int_0^{p_F} dp\, p^{d-1} = V \begin{cases} p_F^3/(3\pi^2) & d = 3 \\ p_F^2/(2\pi) & d = 2 \\ 2p_F/\pi & d = 1 \end{cases}$$

Die innere Energie U ist

$$U = 2\sum_{\boldsymbol{p}} \epsilon_p n_F(\epsilon_p) = 2\frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d p \epsilon_p n_F(\epsilon_p).$$

(a) *Nichtrelativistische fermionische Teilchen in zwei Dimensionen: die Einteilchenenergie ist gegeben durch $\epsilon(k) = k^2/(2m)$. Das Volumen ist $V = L^2$.*

$$p_F = \sqrt{2\pi n}, \qquad n = N/V.$$

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\pi n}{m}.$$

$$U = 2\frac{V}{(2\pi)^2}\int d^2p\, \frac{p^2}{2m} n_F(\epsilon_p) = \frac{V}{2\pi m}\int_0^{p_F} dp\, p^3 = \frac{V p_F^4}{8\pi m} = \frac{\pi V n^2}{2m} = \frac{\pi N^2}{2mV}.$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N = \frac{\pi n^2}{2m}$$

(b) *Ultrarelativistisches Fermigas in drei Dimensionen: die Einteilchenenergie ist gegeben durch $\epsilon(k) = c|\boldsymbol{k}|$, der Massebeitrag zur Energie wird vernachlässigt. Das Volumen ist $V = L^3$.*

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3}.$$

$$\epsilon_F = c(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

$$U = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p\, cp\, n_F(\epsilon_p) = \frac{cV}{\pi^2}\int_0^{p_F} dp\, p^3 = \frac{cV p_F^4}{4\pi^2} = \frac{3^{4/3}\pi^{2/3} c N^{4/3}}{4V^{1/3}}.$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N = \frac{c}{4}(3\pi^2 n^4)^{1/3}.$$

(c) *Ultrarelativistisches Fermigas in zwei Dimensionen: die Energien sind gegeben durch $\epsilon(k) = c|\boldsymbol{k}|$, der Massebeitrag zur Energie wird vernachlässigt. Das Volumen ist $V = L^2$.*

$$p_F = \sqrt{2\pi n}.$$

$$\epsilon_F = c\sqrt{2\pi n}.$$

$$U = 2\frac{V}{(2\pi)^2}\int d^2p\, cp\, n_F(\epsilon_p) = \frac{cV}{\pi}\int_0^{p_F} dp\, p^2 = \frac{cV p_F^3}{3\pi} = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2} c N^{3/2}}{3V^{1/2}}.$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N = \frac{c}{3}(2\pi n^3)^{1/2}.$$

2. Chemisches Potential eines Elektronengases:

Berechnen Sie das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Teilchen-Dichte n. Diskutieren Sie die Grenzfälle $T \ll \epsilon_F$ und $T \gg \epsilon_F$ ($\epsilon_F = \mu(T=0)$). Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.

Berechnen wir die Teilchenzahl N als Funktion von (T, V, μ) (großkanonisch):

$$N = 2V \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} n_F(\epsilon_p) = V \int_0^\infty d\epsilon \, \frac{\nu(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/T}+1} = VT \int_{-\mu/T}^\infty dz \, \frac{\nu(Tz+\mu)}{e^z+1},$$

wobei $\nu(\epsilon)$ die Zustandsdichte ist. Das Integral betrachten wir als eine Gleichung. Wenn wir die Gleichung lösen, finden wir $\mu(T)$.

(a) *ein nichtrelativistisches Elektronengas in zwei Dimensionen*

Die Zustandsdichte ist

$$\nu(\epsilon) = 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \, \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{m}{\pi}.$$

Deswegen

$$N = VT \int_{-\mu/T}^\infty \frac{dz}{e^z+1} = \frac{mVT}{\pi} \ln\left(1 + e^{\mu/T}\right),$$

und zwar

$$\mu(T) = T \ln\left(e^{\pi n/(mT)} - 1\right) = T \ln\left(e^{\epsilon_F/T} - 1\right).$$

Die Grenzfälle:

$$T \ll \epsilon_F : \qquad \mu(T) \approx \epsilon_F - T e^{-\epsilon_F/T},$$

$$T \gg \epsilon_F : \qquad \mu(T) \approx -T \ln \frac{T}{\epsilon_F}.$$

Die Nullstelle:

$$\mu = 0 : \qquad e^{\pi n/(mT)} - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\mu=0} = \frac{\epsilon_F}{\ln 2}.$$

(b) *ein ultrarelativistisches Fermigas in drei Dimensionen*

Die Zustandsdichte ist

$$\nu(\epsilon) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \, \delta(\epsilon - cp) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \, \delta(\epsilon - cp) = \frac{\epsilon^2}{\pi^2 c^3}.$$

Deswegen

$$N = \frac{VT}{\pi^2 c^3} \int\limits_{-\mu/T}^{\infty} dz\, \frac{(Tz+\mu)^2}{e^z+1} = \frac{VT^3}{\pi^2 c^3} \int\limits_{-\mu/T}^{\infty} dz\, \frac{(z+\mu/T)^2}{e^z+1} = \frac{VT^3}{\pi^2 c^3} \left[\frac{\mu^3}{3T^3} + \frac{\pi^2 \mu}{3T} - 2\mathrm{Li}_3\left(-e^{-\mu/T}\right) \right].$$

und zwar ist die explizite Funktion $\mu(T)$ schwierig zu finden. Hier $\mathrm{Li}_3(z)$ ist der Polylogarithmus.
Die Grenzfälle:

$$T \ll \epsilon_F: \qquad \mu(T) \approx \epsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{3\epsilon_F^2}\right),$$

$$T \gg \epsilon_F: \qquad \mu(T) \approx -T \ln \frac{6T^3}{\epsilon_F^3}.$$

Die Nullstelle ($-\mathrm{Li}_3(-1) = 3\zeta(3)/4$, vobei $\zeta(z)$ die Riemannsche Zetafunktion ist):

$$\mu = 0: \qquad N = \frac{3\zeta(3)}{2} \frac{VT^3}{\pi^2 c^3} \quad \Rightarrow \quad T_{\mu=0} = \epsilon_F \left(\frac{2}{9\zeta(3)}\right)^{1/3}.$$

(c) *und ein ultrarelativistisches Fermigas in zwei Dimensionen*

Die Zustandsdichte ist

$$\nu(\epsilon) = 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2}\, \delta(\epsilon - cp) = \frac{|\epsilon|}{\pi c^2}.$$

Deswegen

$$N = VT \int\limits_{-\mu/T}^{\infty} dz\, \frac{|Tz+\mu|}{e^z+1} = \frac{VT^2}{\pi c^2} \left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{\mu^2}{2T^2} + \mathrm{Li}_2\left(-e^{-\mu/T}\right) \right].$$

Die Grenzfälle:

$$T \ll \epsilon_F: \qquad \mu(T) \approx \epsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{6\epsilon_F^2}\right),$$

$$T \gg \epsilon_F: \qquad \mu(T) \approx -T \ln \frac{2T^2}{\epsilon_F^2}.$$

Die Nullstelle ($\mathrm{Li}_2(-1) = -\pi^2/12$):

$$\mu = 0: \qquad N = \frac{\pi^2}{12} \frac{VT^2}{\pi c^2} \quad \Rightarrow \quad T_{\mu=0} = \epsilon_F \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{1/2}.$$

3. Wärmekapazität eines Elektronengases:

Betrachten Sie die Wärmekapazität eines Elektronengases. In der Vorlesung haben wir die Wärmekapazität c_V bei einem festen chemichen Potential berechnet. Die Wärmekapazität bei der festen Teilchenzahl unterscheidet sich bei einer kleinen Korrektur.

Finden Sie diese Korrektur für $T \ll E_F$. Berechnen Sie auch die Wärmekapazität c_P.

Die Sommerfeld-Entwicklung für das Thermodynamischen Potential ergibt:

$$\Omega(V,T,\mu) = -V\left[\int_0^\mu d\epsilon\, a(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}T^2\nu(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}T^4\nu''(\mu) + \ldots\right],$$

wobei $\nu(\epsilon)$ ist die Zustandsdichte und

$$a'(\epsilon) = \nu(\epsilon).$$

Die Entropie ist dann

$$S(V,T,\mu) = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} = V\frac{\pi^2}{3}T\nu(\mu) + V\frac{7\pi^4}{90}T^3\nu''(\mu) + \ldots.$$

Die Wärmekapazität ist

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S(V,T,\mu(N,T))}{\partial T}\right)_{V,N}.$$

Für $T \to 0$ gilt (siehe Aufgabe 2)

$$\mu(N,T) = \epsilon_F - \delta\mu(N,T), \qquad \delta\mu(N,T) \ll \epsilon_F.$$

Deswegen

$$\nu(\mu) \approx \nu(\epsilon_F) - \nu'(\epsilon_F)\delta\mu(N,T), \qquad \nu''(\mu) \approx \nu''(\epsilon_F) - \nu'''(\epsilon_F)\delta\mu(N,T).$$

Es folgt

$$C_V = V\frac{\pi^2}{3}T\left[\nu(\epsilon_F) - \nu'(\epsilon_F)\delta\mu(N,T)\right] - V\frac{\pi^2}{3}T^2\nu'(\epsilon_F)\frac{\partial\delta\mu(N,T)}{\partial T} + V\frac{7\pi^4}{30}T^3\nu''(\epsilon_F) + \ldots$$

Um die Wärmekapazität bei dem festen Druck zu betimmen, hat man zwei Möglichkeiten. Erst soll man die Zustandsgleichung bestimmen. Davon folgt einen Zusammenhang zwischen den Druck und das Volumen. Jetzt kann man das Volumen als Funktion von Druck bestimmen, dann in der Entropie ersetzen und die Wärmekapazität als eine Ableitung berechnen. Die Alternative ist die allgemeine thermodynamische Relationen zu benutzen. Davon folgt

$$C_P - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

Die Ableitung $(\partial P/\partial T)_V$ kann man von dem thermodynamischen Potential finden:

$$\Omega = -PV \quad \Rightarrow \quad P = \int_0^\mu d\epsilon \, a(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} T^2 \nu(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} T^4 \nu''(\mu) + \dots$$

Der führende Beitrag zur Ableitung ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \approx \frac{\pi^2}{3} T \nu(\epsilon_F).$$

Die Ableitung $(\partial P/\partial V)_T$ kann man von der Zustandsgleichung bei $T = 0$ bestimmen. Es folgt

$$C_P - C_V \sim T^3.$$

(a) *ein nichtrelativistisches Elektronengas in drei Dimensionen*

Die Zustandsdichte ist

$$\nu(\epsilon) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \, \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\pi^2} \sqrt{\epsilon}.$$

Deswegen

$$\nu(\epsilon_F) = \frac{m p_F}{\pi^2}, \qquad \nu'(\epsilon_F) = \frac{\nu(\epsilon_F)}{2\epsilon_F}, \qquad \nu''(\epsilon_F) = -\frac{\nu(\epsilon_F)}{4\epsilon_F^2}.$$

Von der Vorlesung:

$$\delta\mu(N, T) = \frac{\pi^2}{12} \frac{T^2}{\epsilon_F}.$$

Alle drei führenden Korrekturen zur C_V sind von der gleichen Größenordnung:

$$C_V = V \frac{\pi^2}{3} T \nu(\epsilon_F) \left[1 - \pi^2 \frac{T^2}{\epsilon_F^2} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{7}{120}\right)\right]$$

Die Zustandsgleichung by $T = 0$ ist von der Vorlesung bekannt

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Deswegen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=0} = -\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3mV} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = -\frac{2}{3} \epsilon_F \frac{N}{V} = -\frac{2}{3} \epsilon_F \frac{p_F^3}{3\pi^2},$$

und

$$C_P - C_V \approx V T^3 \nu^2(\epsilon_F) \frac{\pi^4}{9} \frac{9\pi^2}{2\epsilon_F p_F^3} = V \frac{\pi^4}{4} \frac{T^3}{\epsilon_F^2} \nu(\epsilon_F).$$

(b) *ein nichtrelativistisches Elektronengas in zwei Dimensionen*

Hier

$$\nu(\mu) = const = \nu(\epsilon_F) = \frac{m}{\pi}.$$

Deswegen verschwinden alle Korrekturen

$$C_V = V\frac{\pi m}{3}T.$$

Um die Zustandsgleichung herzuleiten, vergleichen wir die Energie

$$E = V\int d\epsilon\ \epsilon\ \nu(\epsilon)n_F(\epsilon),$$

und das thermodynamischen Potential

$$\Omega = -PV = -V\int d\epsilon a(\epsilon)n_F(\epsilon).$$

Wenn $\nu(\epsilon) = const$, gilt $a(\epsilon) = \epsilon$). Die Zustandsgleichung ist dann

$$P = \frac{\pi}{2m}\frac{N^2}{V^2}.$$

Die Kompressibilität ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=0} = -\frac{1}{\nu(\epsilon_F)}\frac{N^2}{V^3} = -\frac{\nu(\epsilon_F)\epsilon_F^2}{V}$$

und

$$C_P - C_V \approx V\frac{\pi^4}{9}\frac{T^3}{\epsilon_F^2}\nu(\epsilon_F).$$

(c) *ein ultrarelativistisches Fermigas in drei Dimensionen*

Hier ist die Zustandsdichte (siehe Aufgabe 2)

$$\nu(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\pi^2 c^3},$$

deswegen

$$\nu'(\epsilon_F) = \frac{2\nu(\epsilon_F)}{\epsilon_F}, \qquad \nu''(\epsilon_F) = \frac{2\nu(\epsilon_F)}{\epsilon_F^2}.$$

Von der Aufgabe 2:

$$\delta\mu(N,T) = \frac{\pi^2}{3}\frac{T^2}{\epsilon_F}.$$

Alle drei führenden Korrekturen zur C_V sind von der gleichen Größenordnung:

$$C_V = V\frac{\pi^2}{3}T\nu(\epsilon_F)\left[1 - \pi^2\frac{T^2}{\epsilon_F^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{7}{15}\right)\right] = V\frac{\pi^2}{3}T\nu(\epsilon_F)\left[1 - \frac{23\pi^2}{15}\frac{T^2}{\epsilon_F^2}\right]$$

Die Zustandsgleichung by $T = 0$ ist von der Aufgabe 1 bekannt

$$P = \frac{c}{4}(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}.$$

Deswegen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=0} = -\frac{c}{3V}(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = -\frac{1}{3V}\epsilon_F\frac{N}{V} = -\frac{\epsilon_F^4}{9\pi^2c^3V} = -\frac{\nu(\epsilon_F)\epsilon_F^2}{9V},$$

und

$$C_P - C_V \approx V\pi^4\frac{T^3}{\epsilon_F^2}\nu(\epsilon_F).$$

(d) *ein ultrarelativistisches Fermigas in zwei Dimensionen*

Hier ist die Zustandsdichte (siehe Aufgabe 2)

$$\nu(\epsilon) = \frac{|\epsilon|}{\pi c^2},$$

deswegen

$$\nu'(\epsilon_F) = \frac{\nu(\epsilon_F)}{\epsilon_F}, \qquad \nu''(\epsilon_F) = 0.$$

Von der Aufgabe 2:

$$\delta\mu(N,T) = \frac{\pi^2}{6}\frac{T^2}{\epsilon_F}.$$

Hier haben wir nur die zwei Korrekturen zur C_V:

$$C_V = V\frac{\pi^2}{3}T\nu(\epsilon_F)\left[1 - \pi^2\frac{T^2}{\epsilon_F^2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\right] = V\frac{\pi^2}{3}T\nu(\epsilon_F)\left[1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{T^2}{\epsilon_F^2}\right]$$

Die Zustandsgleichung by $T = 0$ ist von der Aufgabe 1 bekannt

$$P = \frac{c}{3}(2\pi)^{1/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{3/2}.$$

Deswegen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=0} = -\frac{c}{2V}(2\pi)^{1/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{3/2} = -\frac{1}{2V}\epsilon_F\frac{N}{V} = -\frac{\epsilon_F^3}{4\pi c^2V} = -\frac{\nu(\epsilon_F)\epsilon_F^2}{4V},$$

und

$$C_P - C_V \approx V\frac{4\pi^4}{9}\frac{T^3}{\epsilon_F^2}\nu(\epsilon_F).$$