Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman

PD Dr. B. Narozhny

Blatt 1

Lösungsvorschlag

---

1. Landau-Niveaus:

(a) *Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung.*

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x+\frac{eH}{c}y\right)^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2\right]\psi=E\psi.$$

(b) *Leiten Sie eine Gleichung für die Funktion $\chi(y)$ her.*

$$\chi''+\frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(E-\frac{p_z^2}{2m}\right)-\frac{m}{2}\omega_H^2(y-y_0)^2\right]\chi=0.$$

Die Eigenfrequenz:

$$\omega_H=\frac{|e|H}{mc}=2\mu_B H.$$

Das Zentrum der Schwingung:

$$y_0=-c\frac{p_x}{eH}.$$

(c) *die Eigenenergien*

Energieniveaus des Oszillators:

$$E'=\hbar\omega_H\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Die Landau-Niveaus:

$$E=\hbar\omega_H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2m}.$$

(d) *Warum sind die Landau- Niveaus entartet? Finden Sie den Entartungsgrad*

Die Entartung: die Landau-Niveaus sind unabhängig von p_x!
Der Mittelpunkt y_0 muss innerhalb von der Fläche L_xL_y liegen:

$$0\leqslant y_0\leqslant L_y.$$

Deswegen, die p_x-Werte gehören zu einem begrenzten Interval

$$\Delta p_x = \frac{eH}{c} L_y.$$

Die Zahl der möglichen Werte im Interval Δp_x ist

$$\mathcal{N}_{p_x} = \frac{L_x}{2\pi\hbar}\Delta p_x.$$

Deswegen der Entartungsgrad der Landau-Niveaus ist

$$\mathcal{N} = \frac{eHS}{2\pi\hbar c}, \quad S = L_x L_y.$$

2. Landau-Diamagnetismus in 2D: hohe Temperaturen:

(a) *Finden Sie die Einteilchenzustandssumme Z_1 in Bezug auf den Bohrschen Magneton $\mu_B = |e|/(2m)$ und die thermische Wellenlänge λ_T.*

Die Einteilchenzustandssumme ist

$$Z_1 = \sum_{\{\alpha\}} e^{-E_\alpha/T}.$$

Die Mikrozustände $\{\alpha\}$ sind durch die Quantenzahlen n und p_x charakterisiert ($\hbar = 1$)

$$\{\alpha\} \to \{n, p_x\}, \qquad E_\alpha = \omega_H \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Die kanonische Einteilchenzustandssumme ist dann

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_x} \exp\left[-\frac{\omega_H}{T}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Da die Zustände mit unterschiedlichen p_x entartet sind, können wir die Summe über p_x direkt auswerten, die ergibt den Entartungsfaktor

$$Z_1 = \frac{eHL_xL_y}{2\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\omega_H}{T}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{eHL_xL_y}{2\pi c} \frac{e^{-\omega_H/(2T)}}{1 - e^{-\omega_H/T}} = \frac{eHL_xL_y}{4\pi c} \frac{1}{\sinh \frac{\omega_H}{2T}}.$$

Mit $\lambda_T = \sqrt{2\pi/(mT)}$ erhalten wir

$$Z_1 = \frac{L_xL_y}{\lambda_T^2} \frac{\omega_H/(2T)}{\sinh[\omega_H/(2T)]}.$$

(b) *Bestimmen Sie die Magnetisierung*
Die Zustandssumme faktorisiert, deshalb ist die freie Energie

$$F = -T \ln Z = -NT \ln Z_1 + T \ln N!.$$

Wir setzen Z_1 ein und berücksichtigen nur Terme, die zur Magnetisierung beitragen:

$$F = -NT \ln \frac{\mu_B H}{T} + NT \ln \sinh \frac{\mu_B H}{T} + \ldots.$$

Daraus ergibt sich die Magnetisierung

$$M_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{V,T} = \frac{NT}{H} - N\mu_B \coth \frac{\mu_B H}{T} < 0.$$

Das bedeutet dass die Magnetisierung dem in positive z-Richtung zeigenden Feld H entgegengerichtet ist. Die "spinlosen" Elektronen verhalten sich also diamagnetisch.

3. Magnetismus des zwei-dimensionalen Fermigases:

(a) *Schreiben Sie das großkanonischen Potential Ω als die Summe über n. Berücksichtigen Sie auch die Spinentartung.*

Das großkanonische Potential

$$\Omega = -T \sum_\lambda \ln\left(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_\lambda)}\right).$$

Die Mikrozustände sind durch n bezeichnet. Man muss auch die Spinentartung (2) und die Entartung der Landau-Niveaus bemerken. Deswegen:

$$\sum_\lambda \to 2\mathcal{N} \sum_n.$$

Dann

$$\Omega = -T \frac{eHL_xL_y}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left[1 + e^{[\mu - \omega_H(n+1/2)]/T}\right]$$

(b) *Leiten Sie den foldgenden Ausdruck her*

$$\Omega = 2\mu_B H \sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_n), \quad \mu_B = \frac{|e|}{2mc},$$

und finden Sie die Funktion $f(\mu_n)$.

$$\Omega = -2\mu_B H \times 2\frac{L_xL_y}{\lambda_T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left[1 + e^{[\mu - \omega_H(n+1/2)]/T}\right] = 2\mu_B H \sum_{n=0}^{\infty} f(\mu_n),$$

mit

$$\mu_n = \mu - (2n+1)\mu_B H.$$

Deswegen

$$f(\mu) = -2\frac{L_x L_y}{\lambda_T^2} \ln\left[1 + e^{\mu/T}\right].$$

(c) *Zeigen Sie, dass Ω als*

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2}$$

geschrieben werden kann.

Die Summationformel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) \approx \int_0^{\infty} dx F(x) + \frac{1}{24}F'(0).$$

Dann

$$\begin{aligned}
\Omega &= 2\mu_B H \int_0^{\infty} dx f(\mu - 2\mu_B H x) + \frac{2\mu_B H}{24}\left.\frac{\partial}{\partial n} f(\mu - 2\mu_B H n)\right|_{n=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\mu} dx f(x) - \frac{(2\mu_B H)^2}{24}\frac{\partial f(\mu)}{\partial\mu}.
\end{aligned}$$

Das erste Glied ist unabhängig vom Magnetfeld. Deswegen

$$\Omega = \Omega_0(\mu) - \frac{1}{6}\mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\mu^2}.$$

(d) *Finden Sie einen Ausdruck für die Suszeptibilität.*

Die Suszebilität ist

$$\chi_{dia} = \frac{\mu_B^2}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2}$$

Vergleichen Sie die erhaltene Suszeptibilität mit der Pauli-Suszeptibilität, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben:

$$\chi_P = \mu_B^2 \left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{T,V}.$$

Bemerken Sie, dass

$$N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V}.$$

Es folgt:

$$\chi_{dia} = -\frac{1}{3}\chi_P.$$

Was ist die gesamte Suszeptibilität des Elektrongases? Ist das Gas para- oder diamagnetisch?

Die gesamte Suszebilität:

$$\chi = \chi_{dia} + \chi_P = \frac{2}{3}\chi_P.$$

Das Gas ist paramagnetisch.