Übungen zur Theoretischen Physik Fa WS 17/18

Prof. Dr. A. Shnirman | **Blatt 1**
PD Dr. B. Narozhny | **Besprechung 07.11.2017**

---

1. Stirlingsformel: (15 Punkte)

Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad n \gg 1.$$

Benutzen Sie hierzu die Definition von $n!$ über die Gammafunktion

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty dx \; x^n \; e^{-x}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = n$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - n$. Dies liefert ein leicht auszurechnendes Gaußsches Integral.

2. Legendretransformation: (15 Punkte)

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U-Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ heißt Legendretransformierte zu $U(S)$. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

(a) Zeigen Sie, daß die vollständigen Differentiale der Kurve und ihrer Legendretransformierten durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad \text{und} \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

(b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendretransformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U/\partial S|_V$ sowie $-P = \partial U/\partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$. Die Funktionen $U(S, V)$, $F(T, V)$ und $H(S, P)$ entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

3. Funktionaldeterminantenkalkül: (35 Punkte)

Seien $u(x,y)$ und $v(x,y)$ Funktionen der unabhängigen Variablen x und y. Als Funktionaldeterminante bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_y & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y \qquad \frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}} .$$

(b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch $\phi(x,y)$ =const= z gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_\phi = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi\right)^{-1} \quad , \qquad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\phi = -\frac{\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_y}{\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_x} .$$

(Bem.: Oft schreiben wir in obigen Beziehungen einfach $z = z(x,y)$ und ersetzen ϕ überall durch z).

(c) Wir betrachten nun drei Variablen, die eine Bedingung $F(x,y,z) = 0$ erfüllen, sowie zwei der Variablen eine weitere Bedingung $w = w(x,y)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z \quad , \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z .$$

4. Ideales Boltzmann-Gas: (35 Punkte)

Die innere Energie eines idealen einatomigen Boltzmann-Gases beträgt $U = 3Nk_BT/2$, wobei die Zustandsgleichung $pV = Nk_BT$ lautet. Hierbei bezeichnet N die Zahl der Atome, T die Temperatur, p den Druck und V das Volumen des Systems.

(a) Analysieren Sie den Carnot-Prozess für ein ideales Boltzmann-Gas. Der Carnot-Prozess setzt sich zusammen aus einer isothermen Expansion von einem Volumen V_1 zu einem Volumen V_2 bei der Temperatur T_1, einer adiabatischen Expansion zu einer Temperatur $T_2 < T_1$, einer isothermen Kompression bei der Temperatur T_2 und einer adiabatischen Kompression zum Ausgangspunkt (T_1,V_1). Berechnen Sie die Arbeit, die vom System in jedem Schritt geleistet wird und die Wärme, die vom Gas wärend der isothermen Expansion (Kompression) aufgenommen (abgegeben) wird. Berechnen Sie den Wirkungsgrad (vom System geleistete Arbeit/zugeführte Wärme) der Carnot-Maschine als Funktion von T_1 und T_2.

(b) Untersuchen Sie den selben Carnot-Prozess in der umgekehrten Richtung (die isotherme Kompression des Gases findet bei der höheren Temperatur T_1 statt). Was ist der Zweck dieses Prozesses? Berechnen Sie die Wärme, die im Prozess aus dem kalten Wärmebad entnommen wird und vergleichen Sie sie mit der Arbeit, die von einer externen Maschine geleistet wird um den Prozess zu durchlaufen.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint \frac{\delta Q}{T},$$

über den Carnot-Prozess für das ideale Boltzmann-Gas. Dabei bezeichnet δQ die infinitesimale Menge an Wärme die vom System aufgenommen wird und das Integral läuft über den kompletten Carnot-Prozess. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Berechnen Sie die Entropie des Systems $S(T,V)$ ($dS = \delta Q/T$) als Funktion der Temperatur und des Volumens indem Sie von der inneren Energie ausgehen. Bestimmen Sie die freie Energie $F(T,V)$.

Hinweis: Die freie Energie ist durch $F = U - TS$ definiert.