

Winter-Semester 2017/18

Moderne Theoretische Physik IIa

Statistische Physik

Dozent: Alexander Shnirman

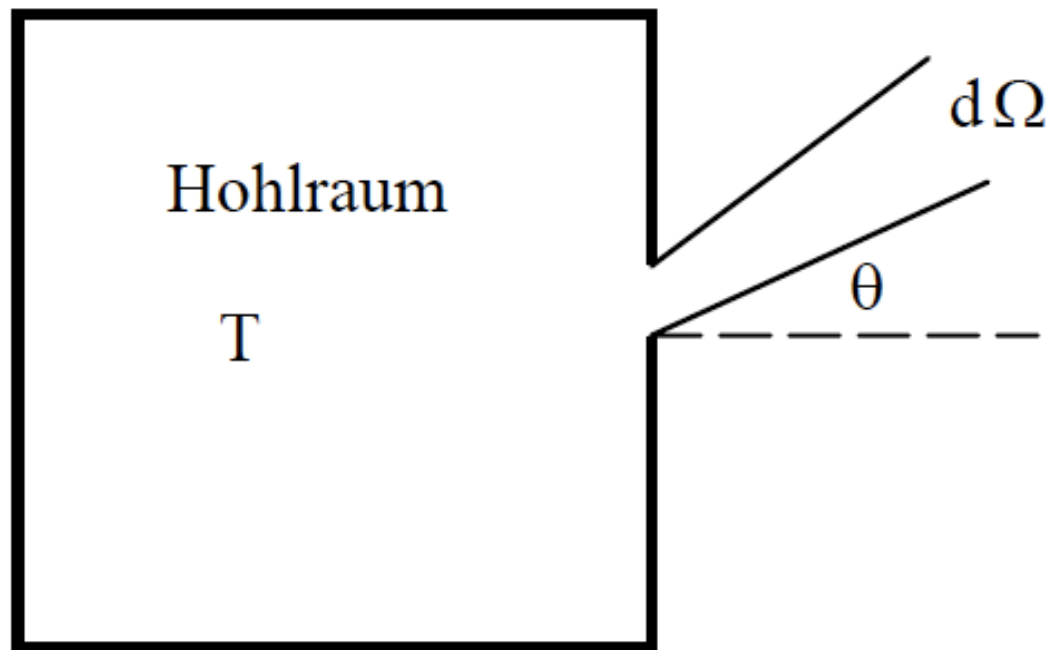
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Do 11:30-13:00, Lehmann Raum 022, Geb 30.22

<http://www.tkm.kit.edu/lehre/>

Hohlraum-Strahlung

Photonen



nur transversale Photonen

$$\lambda = \mathbf{k}, \sigma \quad \sigma = \pm 1$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$\epsilon_\lambda = \epsilon_{\mathbf{k}} = cp = c\hbar k$$

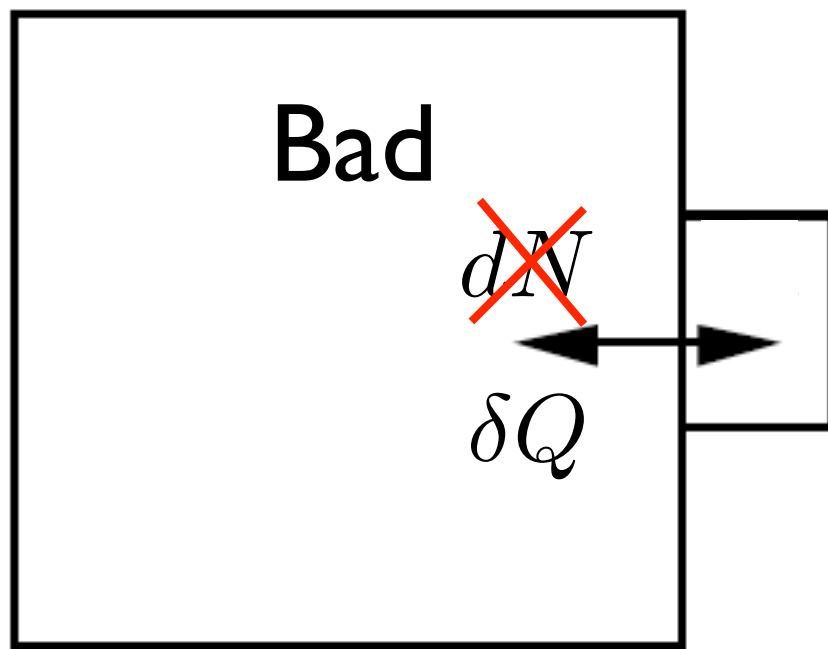
$$\sum_{\lambda} f(\epsilon) = 2V \int d\epsilon \nu(\epsilon) f(\epsilon)$$

$$\nu(\epsilon) = \frac{4\pi\epsilon^2}{(2\pi\hbar c)^3}$$

Zahl der Photonen nicht erhalten $\Rightarrow \mu = 0$

Großkanonische Gesamtheit

alternative Herleitung



$$E = E^S + E^B \quad N = N^S + \cancel{N^B}$$

$$E^S \ll E^B \quad N^S \ll \cancel{N^B}$$

Das Gesamtsystem (System + Bad)
ist mikrokanonisch

$$W_{n,m} = \frac{1}{\Delta N(E)} \text{ für } E < E_n^S + E_m^B < E + dE, \text{ sonst } 0$$

$$W_n = \sum_m W_{n,m} = \frac{\Delta N^B(E - E_n, N - \cancel{N_n})}{\Delta N(E)}$$

$\Delta N(E)$ - Zahl der Zustände
im Energiefenster
 $[E, E + dE]$

$$k_B \ln W_n = k_B \ln [\Delta N^B(E - E_n, N - \cancel{N_n})] - k_B [\Delta N(E)]$$

$$= S^B(E - E_n, N - \cancel{N_n}) - S = S^B(E, N) - E_n \frac{\partial S^B(E)}{\partial E} - N_n \frac{\partial \cancel{S^B(E, N)}}{\partial N} - S$$

$$= \text{const.} - \frac{E_n - \cancel{\mu N_n}}{T}$$

Photonen

Der Zustand ist charakterisiert lediglich durch n_λ

$$N = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \qquad E = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \epsilon_{\lambda} \qquad n_{\lambda} = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Bosonen

kanonisch oder großkanonisch?

kanonisch: Wärme-Austausch durch Erzeugung und Vernichtung von Photonen

$$Z(T, V) = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta \sum_{\lambda} n_{\lambda} \epsilon_{\lambda}}$$

großkanonisch:

$$Z_G(T, V, \mu = 0) = Z$$



$$Z = \prod_{\lambda} Z_{\lambda}$$

$$Z_{\lambda} \equiv \sum_{n_{\lambda}=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_{\lambda} n_{\lambda}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_{\lambda}}}$$

Photonen

$$F(T, V) = \Omega(T, V, \mu = 0) = -k_{\text{B}}T \ln Z_G(T, V, \mu = 0) = k_{\text{B}}T \sum_{\lambda} \ln [1 - e^{-\beta \epsilon_{\lambda}}]$$

$$\lambda = \mathbf{k}, \sigma \quad \sigma = \pm 1 \quad \epsilon_{\lambda} = \epsilon_{\mathbf{k}} = c\hbar k \quad \nu(\epsilon) = \frac{4\pi\epsilon^2}{(2\pi\hbar c)^3}$$

Frequenz $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\hbar} = ck \quad \nu(\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{(2\pi c)^3}$

$$\Omega = 2 V k_{\text{B}}T \int_0^{\infty} d\omega \nu(\omega) \ln [1 - e^{-\beta\hbar\omega}] \quad \int_0^{\infty} dx x^2 \ln [1 - e^{-x}] = -\frac{\pi^4}{45}$$

$$F = \Omega = -V \frac{\pi^2}{45} \frac{(k_{\text{B}}T)^4}{(c\hbar)^3}$$

Photonen

$$F = \Omega = -V \frac{\pi^2}{45} \frac{(k_{\text{B}}T)^4}{(c\hbar)^3}$$

$$S = -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V = -4 \frac{F}{T} = k_{\text{B}} V \frac{4\pi^2}{45} \frac{(k_{\text{B}}T)^3}{(c\hbar)^3}$$

$$U = F + TS = -3F$$

$$C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V = k_{\text{B}} V \frac{4\pi^2}{15} \frac{(k_{\text{B}}T)^3}{(c\hbar)^3}$$

sinnvolle Größe

$$P = -\frac{\Omega}{V} = \frac{\pi^2}{45} \frac{(k_{\text{B}}T)^4}{(c\hbar)^3}$$

Strahlungsdruck

Plank'sche Strahlungsformel

$$\langle n_{\mathbf{k},\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1}$$

Zahl der Photonen im Frequenz-Fenster $n_{\omega} d\omega = \langle n_{\mathbf{k},\sigma} \rangle 2V \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$

Strahlungsenergie im Frequenz-Fenster pro Volumen

$$u(\omega, T) d\omega \equiv \frac{1}{V} n_{\omega} \hbar \omega d\omega$$

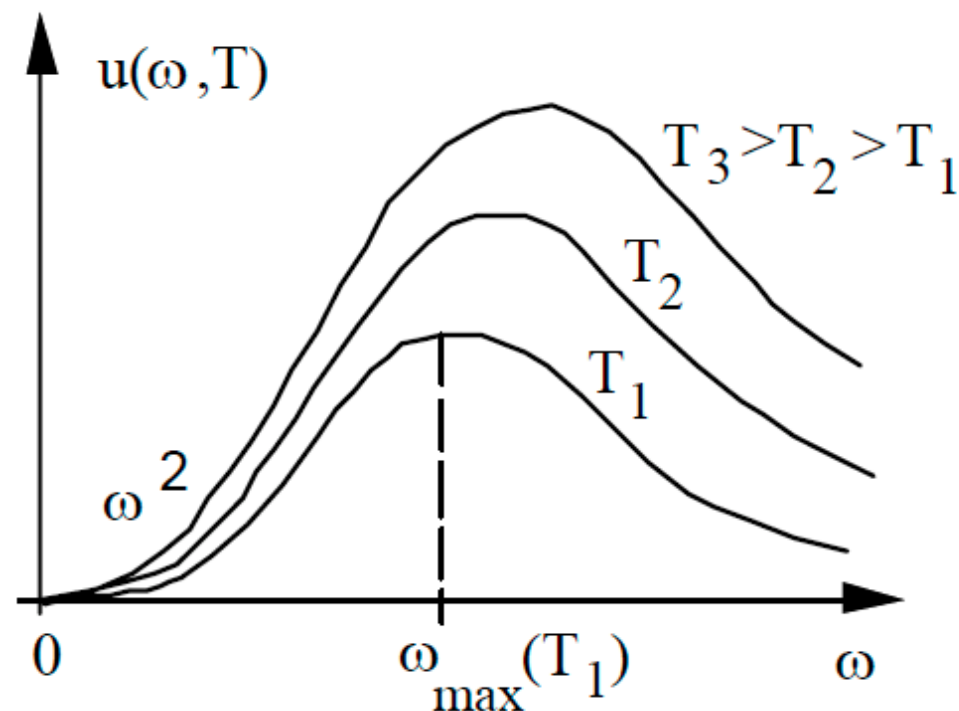
$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Plank-Formel
(1900)

Plank'sche Strahlungsformel

Strahlungsenergie (pro Frequenz, pro Volumen)

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad \text{Plank-Formel}$$



$$\hbar \omega_{\max} = 2,822 k_B T$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz

für $\hbar \omega \ll k_B T$

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} k_B T \omega^2$$

Reyleigh-Jeans-Gesetz

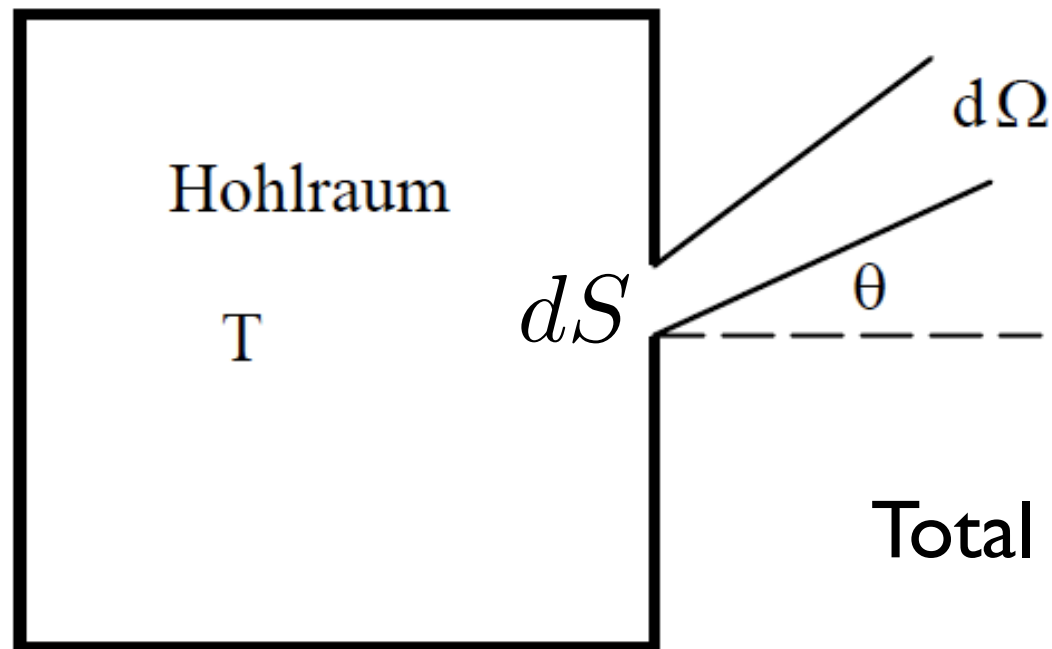
für $\hbar \omega \gg k_B T$

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \hbar \omega^3 e^{-\beta \hbar \omega}$$

Wien'sches Gesetz

Hohlraum-Strahlung

Abgestrahlte Leistung



$$dI(\theta) = u(\omega, T) c d\omega d\Omega (dS \cos \theta)$$

Total abgestrahlte Leistung pro Fläche

$$\frac{dI}{dS} = c \int d\omega u(\omega, T) \int_{\text{Halbraum}} d\Omega \cos \theta$$

$$\frac{dI}{dS} = \frac{c}{4} \int d\omega u(\omega, T) = \sigma T^4$$

Stefan'sches Gesetz

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_{\text{B}}^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

Akustische Phononen

Schall-Wellen

$$\lambda = \mathbf{k}, \sigma$$

longitudinale und 2x transversale Phononen

$$\sigma = l, t_1, t_2$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$\epsilon_\lambda = \epsilon_{\mathbf{k}} = cp = c\hbar k = \hbar\omega_{\mathbf{k}}$$

c - Schall-Geschwindigkeit

Debye-Modell

$$\nu(\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{(2\pi c)^3}$$

für $\omega < \omega_D$

$$\nu(\omega) = 0$$

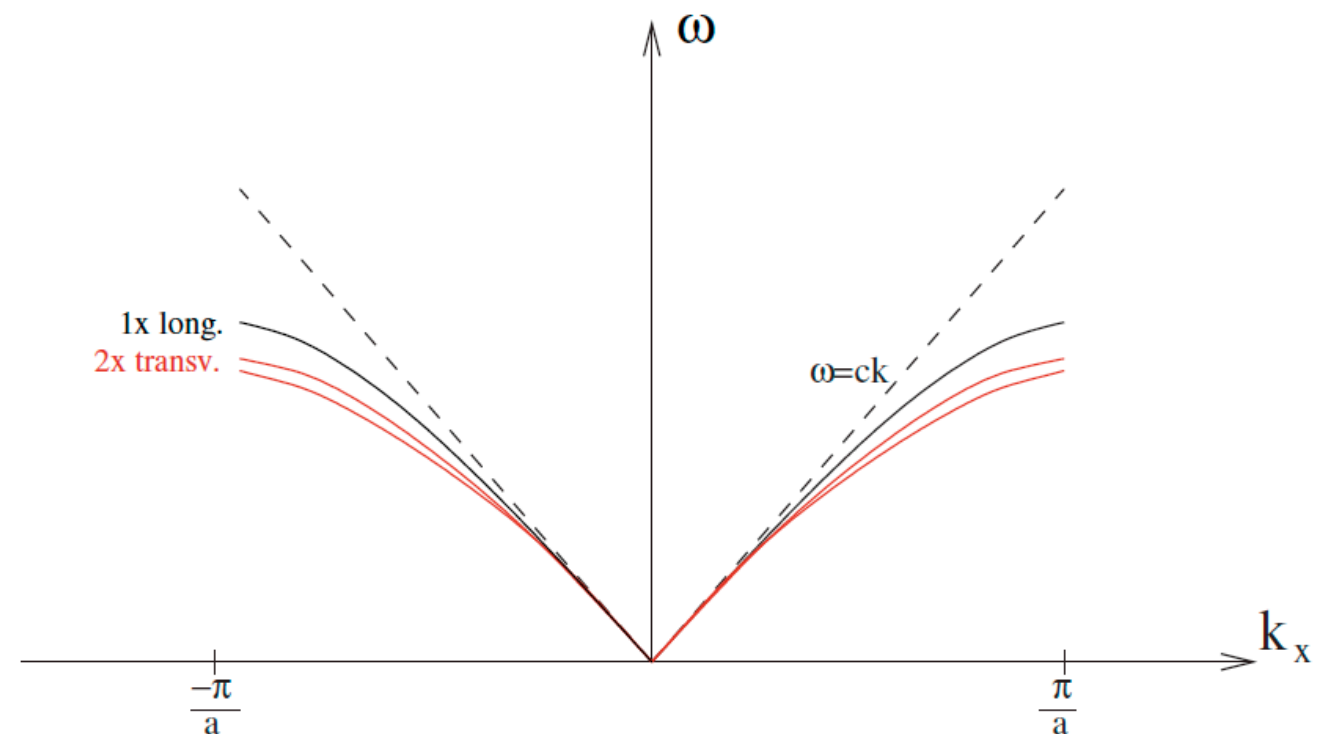
für $\omega > \omega_D$

$$\omega_D = ck_D \sim \frac{c\pi}{a}$$

a - Gitterkonstante

Normierung, N Atome
(Elementarzellen)

$$3 \int_0^{\omega_D} d\omega \nu(\omega) = 3 \frac{N}{V}$$



Akustische Phononen

Debye-Modell

$$\nu(\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{(2\pi c)^3} \quad \text{für } \omega < \omega_D$$
$$\nu(\omega) = 0 \quad \text{für } \omega > \omega_D$$

$$\Omega = 3 V k_B T \int_0^{\omega_D} d\omega \nu(\omega) \ln [1 - e^{-\beta \hbar \omega}]$$

$$\theta_D \equiv \frac{\hbar \omega_D}{k_B}$$

Debye-Temperatur

Übung

$$C_V \propto \frac{T^3}{\theta_D^3} \quad \text{für } T \ll \theta_D$$

$$C_V = 3Nk_B \quad \text{für } T \gg \theta_D$$