

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2017/2018

Prof. Dr. A. Mirlin, PD Dr. I. Gornyi
Dr. N. Kainaris, Dr. S. Rex, J. KlierBlatt 1
Besprechung: 26.10.2017**1. Fermi-Gas in Graphen:** (4+8+8=20 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir die statistische Mechanik des idealen Fermi-Gases. Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas bestehend aus Spin-1/2-Teilchen mit der Dispersionsrelation

$$\epsilon_{\vec{p}} = v|\vec{p}| \quad (1)$$

in $D = 2$ räumlichen Dimensionen. Ein solches zweidimensionales Fermi-Gas kann z.B. in Graphen realisiert werden (der Einfachheit halber ignorieren wir die Zustände mit negativer Energie $\epsilon < 0$).

- Berechnen Sie die Zustandsdichte $\nu(\epsilon)$ des Gases pro Spinprojektion.
- Finden Sie die Fermi-Energie ϵ_F und den Druck P des Gases bei $T = 0$ in Abhängigkeit von dem Volumen V und der Dichte $n = N/V$.
- Für beliebige T kann man die thermodynamische Größen durch Integrale über die Fermi-Funktion ausdrücken. Bestimmen Sie auf diesem Weg die Beziehung zwischen der inneren Energie $U(T)$ und dem großkanonischen Potential $\Omega(T)$ (die explizite Berechnung der Integrale über die Fermi-Funktion ist nicht gefordert).

2. Drei Bosonen mit Spin: (10 + 10 = 20 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir drei bosonische Teilchen, die Spin S besitzen. Mit $\phi_\lambda(\mathbf{x}, \sigma) = \varphi_\lambda(\mathbf{x})\chi_\sigma$ bezeichnen wir normierte Einteilchen-Eigenfunktionen, wobei $\varphi_\lambda(\mathbf{x})$ den Ortsorbitalanteil beschreibt und χ_σ mit $\sigma \in \{-S, \dots, S\}$ den Spinanteil.

- Schreiben Sie die normierten Vielteilchen-Wellenfunktionen $\Psi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ von drei identischen Bosonen, die die Einteilchenzustände λ_1 , λ_2 und λ_3 besetzen, wobei $\xi_i = (\mathbf{x}_i, \sigma_i)$ mit $i = 1, 2, 3$. Das Ergebnis hängt davon ab ob diese Zustände gleich oder verschieden sind. Betrachten Sie alle möglichen Fälle.
- Betrachten Sie nun den Fall von drei identischen Bosonen, die jeweils den Spin $S = 1$ besitzen und die gleiche Orbitalwellenfunktion $\varphi_\lambda(\mathbf{x})$ besetzen. Finden Sie alle normierten Vielteilchenfunktionen und bestimmen Sie die Anzahl der unabhängigen Zustände für die verschiedenen möglichen Spinkonfigurationen.

3. Doppel-Quantentopf: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieniveaus und die Wellenfunktionen eines Teilchens der Masse m , das sich in dem eindimensionalen Doppel-Quantentopf mit dem Potential

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -L/2, \\ u \delta(x), & -L/2 < x < L/2, \\ \infty, & x \geq L/2 \end{cases}$$

befindet.