Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex

Blatt 4
Besprechung: 04.12.2018

---

1. Random Walk (6 + 6 + 3 = 15 Punkte)

Ein orientierungsloser Erstsemesterstudent sucht die Mensa. Er startet am Ort $(x, y) = (0, 0)$ und geht pro Zeitintervall $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ genau $10\,\mathrm{m}$ weit, wobei die Richtung jeweils zufällig entlang der Koordinatenachsen gewählt wird, also (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) entlang $\pm\hat{\mathbf{e}}_x$ oder $\pm\hat{\mathbf{e}}_y$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Ortes nach N Zeitintervallen. Um was für eine (aus der Vorlesung bekannte) Art der Verteilung handelt es sich? Welche Verteilung erhält man für großes N?

(b) Bestimmen Sie die mittlere Entfernung vom Ausgangspunkt als Funktion der Zeit für $t \gg \Delta t$! Welcher Wert ergibt sich für $t = 1\,\mathrm{h}$?

(c) Sie treffen den Studenten zufällig am Gerthsen-Hörsaal und weisen ihm den Weg in positiver x-Richtung, wo sich die Mensa in einem Abstand von $400\,\mathrm{m}$ befindet. Der Student ändert nun sein Vorgehen und geht pro Zeitintervall konstant $10\,\mathrm{m}$ in x-Richtung, außerdem aber $10\,\mathrm{m}$ entweder in positiver oder negativer y-Richtung (mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Wie wahrscheinlich ist es, dass der Student höchstens $100\,\mathrm{m}$ neben der Mensa (in y-Richtung) ankommt?

Hinweis: Es kann hilfreich sein, den Prozess für (a) und (b) in einem um $45°$ rotierten Koordinatensystem zu beschreiben.

Bemerkung: Das hier verwendete Modell bezeichnet man als diskreten Random Walk in zwei Dimensionen. Es kann auf beliebige Dimensionen und kontinuierliche Bewegung verallgeminert werden. Random Walks sind sehr nützlich zur Beschreibung wichtiger physikalischer Prozesse, z.B. der Diffusionsbewegung von Teilchen.

2. Ergodizität (4 + 5 + 6 = 15 Punkte)

Wiederholen Sie die Ergodenhypothese aus der Vorlesung. Wir wollen untersuchen, welche der folgenden drei klassischen Systeme ergodisch sind:

(a) ein eindimensionaler harmonischer Oszillator, $V(x) = V_0 x^2$

(b) eine Kugel in 2D in einem kreisrunden Billard, d.h. im Potential $V(\vec{x}) = V_0\theta(\vec{x}^2 - R^2)$ mit $V_0 \to \infty$ und der Theta-Funktion θ

(c) ein Teilchen in einem Doppelmuldenpotential in 1D, wobei $V(x)$ genau zwei lokale Minima an x_1, x_3 mit $V(x_1) = V(x_3) < 0$ und ein lokales Maximum an x_2 mit $V(x_2) = 0$, $x_1 < x_2 < x_3$ haben soll und $V(x) \longrightarrow \infty$ für $x \longrightarrow \infty$.

Überlegen Sie dazu, welche Parameter in einem Ensemble (hier: Realisierungen desselben Systems mit gleicher Energie) statistisch verteilt sein können. Vergleichen Sie dann, als Beispiel, den Mittelwert von x^2, der sich aus der Ensemblemittelung ergibt, mit dem zeitlichen Mittel eines einzelnen Systems (bei (c) darf qualitativ ohne Rechnung argumentiert werden). Skizzieren Sie für die eindimensionalen Fälle (a) und (c) außerdem den Phasenraum mit einigen Trajektorien verschiedener Energie. Kommt ein System jedem Punkt gleicher Energie beliebig nahe?

3. Dichtematrix (3 + 7 + 10 = 20 Punkte)

Wir betrachten ein quantenmechanisches Ensemble von Spins ($S = \frac{1}{2}\hbar$) in der Basis der Eigenzustände $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ des Spins in z-Richtung. Dieses wird durch den Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j=\uparrow,\downarrow} \rho_{ij} |i\rangle \langle j|$$

mit der Dichtematrix $\rho = (\rho_{ij})$ beschrieben.

(a) Welchen minimalen und maximalen Wert kann $\mathrm{Tr}(\rho^2)$ annehmen? Wie lautet der minimale Wert in einem d-dimensionalen Hilbertraum?
Bemerkung: Ist $\mathrm{Tr}(\rho^2)$ minimal, spricht man von einem maximal gemischten Zustand.

(b) Es sei

$$\rho_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \rho_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{i}{3}\sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Entscheiden Sie jeweils, ob durch ρ_a bzw. ρ_b ein reiner oder ein gemischter Zustand beschrieben wird und schreiben Sie die Dichteoperatoren in Diagonalform, d.h. $\hat{\rho} = \sum_\alpha w_\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha|$.

(c) Gegeben sei ein gemischter Zustand zur Zeit $t = 0$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % für einen Spin in positiver x-Richtung und 80 % für einen Spin in negativer x-Richtung. Das System befinde sich in einem äußeren Magnetfeld B in Richtung der z-Achse. Bestimmen Sie mithilfe der von-Neumann-Gleichung die Dichtematrix zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und berechnen Sie den Erwartungswert des Spins in x-, y- und z-Richtung als Funktion der Zeit.
Hinweis: Jede Dichtematrix im Spinraum kann mit einem Vektor $\mathbf{b}$ und den Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^{\mathrm{T}}$ in der allgemeinen Form $\rho = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right]$ geschrieben werden. In der Zeitentwicklung kann man dann auch $\mathbf{b}(t)$ statt $\rho(t)$ berechnen.