

Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan RexBlatt 6
Besprechung: 15.01.2019

1. Adsorption von Gas an einer Oberfläche (3 + 7 + 5 + 8 = 23 Punkte)

Eine Oberfläche ist in Kontakt mit einem Gas. Temperatur T und chemisches Potential μ des Gases seien bekannt. An N Stellen der Oberfläche kann jeweils ein Gasmolekül adsorbiert werden. Durch die Adsorption verringert sich die Energie eines Gasmoleküls um den Wert Δ .

- Wie groß ist die Fugazität der adsorbierten Moleküle im Vergleich zu den freien Gasmolekülen (im Gleichgewicht)?
- Wir betrachten das System der adsorbierten Moleküle. Berechnen Sie das großkanonische Potential Ω . Dabei soll erkennbar sein, dass Ω proportional zu N ist.
- Welcher Anteil der Oberfläche ist im Gleichgewicht durch das Adsorbat bedeckt, d.h. welcher Anteil der N Stellen ist durch ein Molekül besetzt? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von T , Δ und μ an.
- Nehmen Sie nun an, dass es sich um ein ideales Gas handelt (Teilchenmasse m) und nicht μ sondern der Druck P bekannt ist. Bestimmen Sie die Fugazität des idealen Gases und geben Sie dann das Ergebnis aus (c) in Abhängigkeit von T , Δ und P an.

Hinweis: In der Vorlesung wurde das ideale Gas im kanonischen Ensemble behandelt. Dies lässt sich leicht auf das großkanonische Ensemble erweitern. Setzen Sie die Teilchenzahl, die Sie aus dem großkanonischen Potential erhalten, in die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases ein.

2. Elektronengas im Magnetfeld (4 + 7 + 4 = 15 Punkte)

Wir betrachten Elektronen, deren Bewegung auf die xy -Ebene beschränkt ist, in einem äußeren Magnetfeld B in z -Richtung. Aus der Quantenmechanik kennen Sie bereits die Landau-Niveaus mit den Energien

$$\varepsilon_n = 2\mu_B B \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Dabei ist jedes Niveau g -fach entartet mit

$$g = \frac{eBA}{\pi\hbar c}.$$

wenn das System den Flächeninhalt A hat.

Bemerkung: Wir betrachten in dieser Aufgabe nur den Beitrag der Bahnbewegung der Elektronen und vernachlässigen den Beitrag des Spins (Zeeman-Aufspaltung) zu ε_n . Dafür haben wir im Wert von g zweifache Spinentartung berücksichtigt.

- (a) Berechnen Sie das großkanonische Potential Ω . Beachten Sie dabei, dass Elektronen Fermionen sind.
- (b) Nähern Sie Ω für kleine Felder mithilfe der Euler-Maclaurin-Formel (bis zur ersten Ordnung) für eine Funktion $F(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{24} \left[\frac{dF(x)}{dx} \right]_{x=0} + \int_0^{\infty} dx F(x).$$

Hinweis: $\int_0^{\infty} dx \ln(1 + e^{-x}) = \frac{\pi^2}{12}$.

- (c) Berechnen Sie aus Ω (in der Näherung aus (b)) die magnetische Suszeptibilität $\chi = \partial M / \partial B$. Entscheiden Sie, ob Paramagnetismus oder Diamagnetismus vorliegt.

3. Verdünnte Lösung: chemisches Potential (7 + 5 = 12 Punkte, 14 Bonuspunkte)

Eine Substanz A sei in einem Lösungsmittel B gelöst.

- (a) Der Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{W}_{A,B}$ enthält die Energie des Lösungsmittels, des gelösten Stoffes und einen Wechselwirkungsterm. Notieren Sie damit in allgemeiner Form die großkanonische Zustandssumme für das Gesamtsystem. In einer verdünnten Lösung kann man nun für das chemische Potential annehmen, dass $|\beta\mu_B| \gg 1$ wobei $\mu_B < 0$. Daher kann man Z_G nach der Fugazität z_B entwickeln:

$$Z_G = Z_0 + Z_1 z_B + Z_2 z_B^2 + \dots$$

Welche physikalische Bedeutung haben Z_0 und Z_1 ? Notieren Sie das großkanonische Potenzial bis zur ersten Ordnung in z_B in Abhängigkeit von Z_0 und Z_1 .

Bemerkung: Die Entwicklung nach Potenzen der Fugazität im großkanonischen Ensemble bezeichnet man als Virialentwicklung.

- (b) Wir betrachten die Entwicklung nach z_B bis zur ersten Ordnung. Wie hängt μ_B von der Konzentration $c = N_B/N_A$ ab?
 Hinweis: Berechnen Sie zuerst $\langle N_B \rangle$ aus Ω .
- (c) **(7 Bonuspunkte)** Bestimmen Sie nun die Abhängigkeit von μ_A von c .
 Hinweis: Es existiert eine Maxwell-Relation zwischen μ_A und μ_B . Begründen Sie außerdem, dass $Z_1/Z_0 \propto N_A$.
- (d) **(7 Bonuspunkte)** Wir betrachten nun eine semipermeable Membran zwischen zwei Lösungen (aus den gleichen Stoffen), d.h. eine Membran, die nur von Teilchen des Lösungsmittels durchdrungen werden kann. Zeigen Sie, dass sich bei einem festen Konzentrationsunterschied Δc zwischen den beiden Lösungen ein Druckunterschied einstellt, der (in führender Ordnung) proportional zu Δc ist. Dies ist der sogenannte osmotische Druck.