Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex

Blatt 7
Besprechung: 29.01.2019

Online-Anmeldung von Prüfungsleistungen (in Campus):

- **Vorleistung 1 (Übungsaufgaben): bis 29.01.**
- **Klausur: letzte Vorlesungswoche (04.-08.02.)**
- **Hinweise für SPO 2010 auf der Webseite**

1. Prinzip der maximalen Entropie in einem Quantengas (7+7+7=21 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Entropie eines idealen Quantengas in einem beliebigen Zustand des Systems (der im Allgemeinen kein Gleichgewichtszustand ist) diskutiert. Dabei soll gezeigt werden, dass die Bose- und Fermi-Verteilungsfunktionen aus dem Prinzip der maximalen Entropie abgeleitet werden können.

Wir betrachten ein Quantengas aus $N \gg 1$ nichtwechselwirkenden Bosonen oder Fermionen. Wir wählen ein Energie-Fenster ΔE, so dass ΔE klein im Vergleich zur Gesamtenergie E des Systems ist. Dann kann man Einteilchen-Zustände λ mit Energien $j\Delta E < \epsilon_\lambda < (j+1)\Delta E$ zur Gruppe j zusammenfassen. Jede Gruppe enthält $\nu_j \gg 1$ Einteilchen-Zustände, die von $N_j \gg 1$ Teilchen besetzt werden. Die Entropie des makroskopischen Zustands ist dann durch die Verteilung auf die einzelnen Gruppen gegeben:

$$S = k_B \sum_j \ln\left[\Gamma_j(N_j)\right]$$

Hier ist $\Gamma_j(N_j)$ die Anzahl der Möglichkeiten N_j Teilchen auf die ν_j Zustände in Gruppe j zu verteilen.

(a) Berechnen Sie $\Gamma_j(N_j)$ und die Entropie für Fermionen. Drücken Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von ν_j und der mittleren Teilchenzahl der Gruppe j, $n_j = N_j/\nu_j$, aus.

(b) Wiederholen Sie die Rechnung aus der Aufgabe (a) für Bosonen.

(c) Bei festgehaltenen E und N benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie im Gleichgewicht um die Fermi- und Bose-Verteilungsfunktionen zu erhalten.

2. Bosegas: chemisches Potential (10 Punkte)

In einem Bosegas bildet sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_c ein Bose-Einstein-Kondensat. Das chemische Potential ist dann $\mu = 0$. Durch welchen Zusammenhang wird μ für $T > T_c$ festgelegt? Zeigen Sie, dass für Temperaturen etwas oberhalb von T_c das chemische Potential mit $\mu \propto -(T-T_c)^2$ skaliert (bei konstanter Teilchendichte n).

3. Planck'sche Strahlung (7 + 3 + 5 = 15 Punkte)

(a) Für die elektromagnetische Strahlung in einem Volumen V_1 habe die Planck'sche Strahlungskurve ihr Maximum bei der Frequenz ω_1. Nun wird das Volumen adiabatisch auf $V_2 = 2V_1$ ausgedehnt. Bei welcher Frequenz ω_2 liegt nun das Strahlungsmaximum?

(b) Die kosmische Hintergrundstrahlung hat eine Temperatur von etwa 3 K. Wie viel Energie enthält die Hintergrundstrahlung pro Kubikmeter?

(c) Die Energie der Planck'schen Strahlung ist proportional zu T^α. Welchen Wert hat α in einem n-dimensionalen Universum?

4. Zustandsdichte (4 Punkte + 15 Bonuspunkte)

Berechnen Sie die Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}})$$

für die folgenden Dispersionsrelationen:

(a) $\varepsilon_{\mathbf{p}} = a|\mathbf{p}|$ mit einer Konstante a, in den Dimensionen $n = 1, 2, 3$

(b) **(15 Bonuspunkte)** $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}$ mit Konstanten $\mu, m, \Delta > 0$ in 3 Dimensionen. Untersuchen Sie insbesondere das Verhalten von $\nu(\varepsilon)$ bei den Energien $\varepsilon_1 = \Delta$ und $\varepsilon_2 = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$. Skizzieren Sie die Dispersionsrelation und die Zustandsdichte.